Actes JIAF-JFPDA 2023

Premiers pas vers une logique des paires ordonnées

Henri Prade[1] **Gilles Richard**[1]
[1] IRIT, CNRS et Université Paul Sabatier, France

henri.prade@irit.fr, gilles.richard@irit.fr

Résumé

Les proportions logiques sont des connecteurs propositionnels liant quatre variables sous la forme d'une formule codant la conjonction de deux équivalences entre des indicateurs de similarité ou de dissimilarité relatifs d'une part part à un couple (a, b) et d'autre part à un couple (c, d). La proportion analogique "a est à b comme c est à d" est un exemple de proportion logique. L'article se place dans ce cadre pour dégager des éléments d'une logique manipulant des paires ordonnées. La construction de cette logique s'appuie sur un parallèle avec la logique des évènements conditionnels (qui est à la base du raisonnement non monotone), l'équivalence entre deux évènements conditionnels étant un autre exemple de proportion logique. La logique obtenue semble pouvoir offrir un cadre pour une logique de la "créativité", où des paires de vecteurs Booléens décrivent des transformations réalisables entre objets et où à partir d'un objet donné on peut induire un autre objet sur la base de telles transformations.

Abstract

Logical proportions are propositional connectors linking four variables in the form of a formula encoding the conjunction of two equivalences between indicators of similarity or dissimilarity relative on the one hand to a pair (a, b) and on the other hand to a pair (c, d). The analogical proportion "a is to b as c is to d is an example of a logical proportion. The article places itself in this framework to find elements of a logic manipulating ordered pairs. The construction of this logic is based on a parallel with the logic of conditional events (which is the basis of non-monotonic reasoning), the equivalence between two conditional events being another example of logical proportion. The logic obtained seems to be able to offer a framework for a logic of "creativity", where pairs of Boolean vectors describe feasible transformations between objects and where from a given object one can induce another object on the basis of such transformations.

1 Introduction

La comparaison d'objets ou de situations est certainement une opération cognitive de base. Il n'y a pas pour autant véritablement de logique de la comparaison, ni même de raisonnement de comparaison, si on excepte les proportions analogiques, qui sont des énoncés de la forme "a est à b comme c est à d", qui manifestement posent un parallèle entre les paires ordonnées (a, b) et (c, d), dont les éléments sont rapportés l'un à l'autre.

Pourquoi s'intéresser à des paires ? Il y a au moins deux exemples de paires ordonnées qui font sens du point de vue du raisonnement : i) les paires <condition(s), conclusion> correspondant à des règles "si $\cdots$ alors" ; ii) les paires comparatives entre deux items. On s'occupera principalement de ces dernières dans la suite, même si on rencontrera aussi les premières.

Dans la mesure où il s'agit notamment de définir une relation de conséquence entre paires ordonnées, cette relation une fois symétrisée doit donner naissance à une relation d'équivalence entre paires, qui doit donc être réflexive, symétrique et transitive. Dans un cadre booléen, cette relation correspond donc à un connecteur logique entre quatre variables (deux par paire).

Les proportions logiques [10] offrent précisément un cadre, en logique propositionnelle, de connecteurs quaternaires exprimant des relations entre paires. C'est dans ce cadre, dont nous rappelons l'essentiel maintenant, que nous démarrons les investigations [1].

2 Proportions logiques

De façon générale, l'idée de proportion est associée à la comparaison de paires (ordonnées) dont chaque élément

1. Tous les résultats énoncés dans ce document peuvent être testés sur le site https ://www.irit.fr/ Gilles.Richard/analogy/logic/.

d'une paire est rapporté à l'autre élément de la paire. [2] C'est une comparaison de comparaisons, comme le suggère l'énoncé de la proportion analogique "a est à b comme c est à d".

Dans le cadre booléen, nous avons quatre indicateurs de comparaison pour comparer a à b :

- Deux expriment la *similarité*, soit *positivement* comme $a \wedge b$ (qui est vrai si a et b sont vrais), soit *négativement* comme $\neg a \wedge \neg b$ (qui est vrai si a et b sont faux).
- Les deux autres sont des indicateurs de *dissimilarité* $\neg a \wedge b$ (qui est vrai si a est faux et b est vrai) et $a \wedge \neg b$ (qui est vrai si a est vrai et b est faux).

Les proportions logiques [10, 11] connectent quatre variables booléennes par la conjonction de deux équivalences entre indicateurs de similarité ou de dissimilarité se rapportant respectivement à deux paires (a, b) ordonnées et (c, d). Plus formellement,

Definition 1 *Une proportion logique $T(a, b, c, d)$ est la conjonction de deux équivalences entre un indicateur pour (a, b) d'un côté et un indicateur pour (c, d) de l'autre.*

L'expression

$$((a \wedge \neg b) \equiv (c \wedge \neg d)) \wedge ((a \wedge b) \equiv (c \wedge d))$$

fournit un exemple de proportion logique, où un même opérateur de similarité et un même opérateur de dissimilatité sont appliqués aux deux paires. Comme on peut le voir, elle exprime que "a diffère de b comme c diffère de d" et que "a est similaire à b comme c est similaire à d". Elle semble se rapporter à la comparaison des éléments à l'intérieur de chaque paire, mais on verra qu'il ne s'agit pas d'une proportion analogique.

Il a été établi [10] qu'il existe 120 proportions logiques syntaxiquement et sémantiquement distinctes. Toutes ces proportions partagent une propriété remarquable : elles sont vraies pour exactement 6 valuations de $abcd$ parmi $2^4 = 16$ possibles. Ainsi, l'exemple ci-dessus est vrai pour 0000, 1111, 1010, 0101, 0001, et 0100. Le lecteur intéressé est invité à consulter [10, 11] pour des études approfondies des différents types de proportions logiques.

Dans ce qui suit on ne s'intéressera qu'à des proportions logiques *symétriques* pour la raison indiquée dans l'introduction. Cette propriété indique que l'on peut échanger la paire (a, b) avec la paire (c, d) dans la proportion logique T, i.e., $T(a, b, c, d) \rightarrow T(c, d, a, b)$. De telles proportions logiques sont assez rares :

Proposition 1 *[10] Il n'existe que 12 proportions satisfaisant la symétrie : 4 proportions homogènes, 4 proportions conditionnelles et 4 proportions hybrides.*

2. Dans le cadre numérique, cela correspond notamment aux proportions aritmétiques $a - b = c - d$ et aux proportions géométriques $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ qui égalisent des différences et des rapports respectivement.

Les proportions homogènes ne mélangent pas différents types d'indicateurs dans leurs équivalences (elles n'utilisent que des indicateurs de similarité ou que des indicateurs de dissimilarité). L'expression des proportions conditionnelles est constituée de la conjonction d'une équivalence entre des indicateurs de similarité et d'une équivalence entre des indicateurs de dissimilarité (la raison de leur dénomination apparaitra plus tard). Les proportions hybrides sont caractérisées par des équivalences entre des indicateurs de similarité et des indicateurs de dissimilarité dans leurs définitions.

Les expressions des 12 proportions symétriques sont données dans [10]. Nous redonnerons dans la suite que les expressions de celles qui nous intéressent ici (ce qui excluera les proportions hybrides, aucune n'étant transitive).

Commençons par les proportions homogènes, elles sont au nombre de 4, toutes symétriques. Elles incluent la proportion analogique et 3 autres proportions.

La proportion analogique "a est à b comme c est à d" énonce formellement que "a diffère de b comme c diffère de d et que b diffère de a comme d diffère de c". Cela s'exprime logiquement [8] par le connecteur quaternaire A :

$$\mathrm{A}(a, b, c, d) \triangleq ((a \wedge \neg b) \equiv (c \wedge \neg d)) \wedge ((\neg a \wedge b) \equiv (\neg c \wedge d)) \tag{1}$$

Les noms et les expressions des 3 autres proportions homogènes sont donnés ci-après :

- *paralogie* : $\mathrm{P}(a, b, c, d) \triangleq$

  $$((a \wedge b) \equiv (c \wedge d)) \wedge ((\neg a \wedge \neg b) \equiv (\neg c \wedge \neg d)).$$

  Elle exprime que "ce que a et b ont en commun (positivement ou négativement), c et d l'ont aussi, et inversement". On peut montrer que
  $\mathrm{P}(a, b, c, d)) \Leftrightarrow \mathrm{A}(c, b, a, d)$.

- *analogie renversée* : $\mathrm{R}(a, b, c, d) \triangleq$

  $$((\neg a \wedge b) \equiv (c \wedge \neg d)) \wedge ((a \wedge \neg b) \equiv (\neg c \wedge d)).$$

  L'analogie renversée exprime que "b est à a comme c est à d". De fait, $\mathrm{R}(a, b, c, d) \Leftrightarrow \mathrm{A}(b, a, c, d)$.

- *paralogie inversée* : $\mathrm{I}(a, b, c, d) \triangleq$

  $$((a \wedge b) \equiv (\neg c \wedge \neg d)) \wedge ((\neg a \wedge \neg b) \equiv (c \wedge d))$$

  Cette expression est obtenue en échangeant les indicateurs de similarité positifs et négatifs relatifs à la paire (c, d) dans la définition de la paralogie. $\mathrm{I}(a, b, c, d)$ indique que "ce que a et b ont en commun, c et d ne l'ont pas, et inversement". Cela exprime une sorte d'"orthogonalité" entre les paires (a, b) et (c, d).

A				P				R				I			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0

TABLE 1 – Valuations qui rendent vrai A, P, R, I

La Table 1 donne les 6 valuations booléennes (quadruplets de valeurs) qui rendent vrai A, P, R et I.

Notons également dans la Table 1 que les 6 valuations qui rendent les quatre proportions vraies appartiennent à un ensemble de 8 valuations. Cet ensemble de 8 motifs est caractérisé par la formule logique $K(a, b, c, d) \triangleq (a \equiv b) \equiv (c \equiv d)$, qui correspond à un connecteur de type analogique proposé par S. Klein [5], en relation avec des matériaux anthropologiques (dans le cadre d'une approche structuraliste).

De manière assez remarquable, on peut vérifier que :
— A et I sont les seules proportions homogènes qui satisfont les permutations centrales et externes, à savoir, $T(a, b, c, d) \to T(a, c, b, d)$ et $T(a, b, c, d) \to T(d, b, c, a)$;
— P et I sont les seules proportions homogènes qui satisfont les permutations $T(a, b, c, d) \to T(b, a, c, d)$ et $T(a, b, c, d) \to T(a, b, d, c)$;
— R et I sont les seules proportions homogènes qui satisfont les permutations $T(a, b, c, d) \to T(c, b, a, d)$ et $T(a, b, c, d) \to T(a, d, c, b)$.

La permutation centrale est considérée de très longue date comme une propriété caractéristique de la proportion analogique A, sans doute par mimétisme avec les proportions numériques. La parologie inverse I est extrêmement remarquable car elle est la seule des 120 proportions logiques à être stable sous toutes les permutations de variables deux à deux. [9].

Si on a à l'esprit que la proportion analogique décrit une sorte d'égalité entre paires qui étend l'idée de proportions arithmétiques ou géométriques, il est naturel de s'attendre à une forme de propriété de *transitivité* pour l'analogie A et plus généralement pour d'autres proportions T, ce qui s'exprime comme suit :

$$T(a, b, c, d) \wedge T(c, d, e, f) \to T(a, b, e, f)$$

On peut vérifier que la proportion analogique A, et la paralogie P sont transitives au sens ci-dessus (mais ni l'analogie renversée R, ni la paralogie inversée I ne sont transitives).

Le résultat suivant indique quelles sont les proportions logiques transitives :

Proposition 2 *[10] Il y a 54 proportions logiques qui sont transitives : 2 homogènes A et P, 4 proportions logiques conditionnelles (sur les 16 existantes), à savoir*
$((a \wedge b) \equiv (c \wedge d)) \wedge ((a \wedge \neg b) \equiv (c \wedge \neg d))$ *;*
$((a \wedge b) \equiv (c \wedge d)) \wedge ((\neg a \wedge b) \equiv (\neg c \wedge d))$ *;*
$((a \wedge \neg b) \equiv (c \wedge \neg d)) \wedge ((\neg a \wedge \neg b) \equiv (\neg c \wedge \neg d))$ *;*
$((\neg a \wedge b) \equiv (\neg c \wedge d)) \wedge ((\neg a \wedge \neg b) \equiv (\neg c \wedge \neg d))$*,*
et les 48 proportions dites dégénérées.

Dans une proportion dite dégénérée, deux des quatre indicateurs de similarité ou de dissimilarité de la proportion logique sont identiques. Nous renvoyons le lecteur à [10] pour plus de détails, car ces proportions ne sont jamais symétriques.

Les 4 proportions logiques conditionnelles de la Proposition 2, sont symétriques, ce sont celles dont il est question à la Proposition 1.

Remarquons qu'une proportion logique T peut être *réflexive*, c'est-à-dire que $T(a, b, a, b)$ est vrai pour tout a, tout b, et que donc T est vrai pour les valuations $(0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$, et $(1, 1, 1, 1)$. On a le résultat suivant :

Proposition 3 *[10] Il y a 6 proportions logiques qui sont réflexives : A, P, et les 4 proportions logiques conditionnelles de la Proposition 2.*

Quand on considère les paires ordonnées (a, b) comme des objets atomiques, A, P et les 4 proportions conditionnelles sont des relations d'équivalence sur l'univers des paires booléennes. On peut alors énoncer le résultat :

Proposition 4 *Les proportions logiques A, P, et les 4 proportions logiques conditionnelles de la Proposition 2 sont les seules relations d'équivalence entre paires.*

Venons-en aux 4 proportions logiques conditionnelles qui, comme on va le voir, sont en relation avec notre propos. Expliquons le terme "conditionnel". Il vient du fait que ces proportions expriment des équivalences entre des énoncés conditionnels. En effet, il a été souligné dans [4] qu'une règle "si a alors b" peut être considérée comme une entité à trois valeurs qui est appelée "objet conditionnel", ou "évènement conditionnel", et dénotée $b|a$. Cette entité est *trivaluée* [3] ; elle est :
— vraie si $a \wedge b$ est vrai. Les éléments qui rendent vrai $a \wedge b$ sont les *exemples* de la règle "si a alors b",
— fausse si $a \wedge \neg b$ est vrai. Les éléments qui rendent vrai $a \wedge \neg b$ sont les *contre-exemples* de la règle "si a alors b",
— indéfinie si $\neg a$ est vrai. La règle "si a alors b" n'est alors pas applicable.

Considérons la proportion conditionnelle, qui apparait dans la Proposition 2, et qui a été notre premier exemple de proposition logique :

$$((a \wedge b) \equiv (c \wedge d)) \wedge ((a \wedge \neg b) \equiv (c \wedge \neg d))$$

La proportion logique ci-dessus peut être notée $b|a :: d|c$ en combinant la notation des objets conditionnels et celle de la proportion analogique. En effet, la proportion $b|a :: d|c$ exprime une équivalence sémantique entre les deux règles "si a alors b" et "si c alors d" en énonçant qu'elles ont les mêmes exemples, c'est-à-dire $(a \wedge b) \equiv (c \wedge d))$, et les mêmes contre-exemples, c'est-à-dire $(a \wedge \neg b) \equiv (c \wedge \neg d)$.

La relation de conséquence logique (encore notée $\vDash$) entre deux objets conditionnels $b|a \vDash d|c$, se définit à partir de la conséquence logique booléenne usuelle $\vDash$ de la manière suivante :

$$a \wedge b \vDash c \wedge d \text{ et } (c \wedge \neg d) \vDash a \wedge \neg b \tag{2}$$

qui exprime que les exemples de $b|a$ sont des exemples de $d|c$ et que les contre-exemples de $d|c$ sont des contre-exemples de $b|a$. Cette relation de conséquence logique est naturellement associée à la proportion conditionelle $b|a :: d|c$, puisque $b|a :: d|c$ est équivalent à :

$$b|a \vDash d|c \text{ et } d|c \vDash b|a.$$

La transitivité des 4 proportions conditionnelles de la Proposition 2 reflète le fait qu'elles expriment des équivalences entre objets conditionnels (et donc entre règles), à savoir respectivement $b|a :: d|c$, $a|b :: c|d$, $a|\neg b :: c|\neg d$, et $b|\neg a :: d|\neg c$.

L'objet conditionnel $b|a$ doit donc être pensé comme une règle "si a alors b". Une règle peut avoir des exceptions. C'est-à-dire, qu'on peut avoir en même temps "si a alors b" et une règle "si $(a \wedge c)$ alors $\neg b$". Les deux objets conditionnels $b|a$ et $\neg b|a \wedge c$ ne conduisent pas à une contradiction en présence des faits a et c (à la différence d'une modélisation des règles par l'implication matérielle), dans le cadre d'une logique tri-valuée où la conjonction & est définie par

$$b|a \,\&\, d|c \triangleq (a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow d)|(a \vee c)$$

avec pour sémantique
$val(o_1 \,\&\, o_2) = \min(val(o_1), val(o_2))$
où indéfini > vrai > faux. [3]

On montre [4] que cette quasi-conjonction & (c'est son nom) est associative. Elle exprime que l'ensemble constitué par les deux règles "si a alors b" et "si c alors d" est déclenchable si a ou c est vrai, et dans ce cas la règle déclenchée se comporte comme l'implication matérielle. Cette logique constitue la sémantique la plus simple [1] du système P d'inférence non monotone de Kraus, Lehmann, et Magidor [6]. Le lecteur pourra consulter [1] pour plus de détails.

Comme on vient de le voir, dans ce calcul la règle "si a alors b" est assimilée à une paire ordonnée (a, b) (<condition>, <conclusion>) et possède une sémantique tri-valuée. Dans la suite on s'intéresse de la même façon à une logique de paires, basée sur l'idée de comparaison, en relation avec les équivalences sémantiques exprimées par A et par P.

3. La négation est définie par $\neg(b|a) = (\neg b|a)$. Donc $\neg(b|a)$ est indéfinie si et seulement si $b|a$ l'est.

3 Eléments de logique de paires ordonnées

Dans cette section, nous nous efforçons de dégager quelques éléments d'une logique comparative de paires ordonnées. Les objets, ou items, de la comparaison sont décrits par des vecteurs de valeurs d'attributs (ici booléens).

3.1 Comparer les éléments d'une paire

Soient $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$, $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$, etc. des items décrits au moyen de n attributs booléens.

Les proportions logiques s'étendent à des vecteurs de variables booléennes, en les appliquant composante par composante, sous la forme :

Definition 2

$T(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ si et seulement si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $T(a_i, b_i, c_i, d_i)$

Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, leur comparaison amène à considérer les sous-ensembles d'attributs où ils sont égaux (à 1 ou à 0), et les sous-ensembles d'attributs où ils diffèrent, passant de 0 à 1 ou de 1 à 0, quand on va de $\vec{a}$ à $\vec{b}$. Ce qui conduit à poser :

$Equ^0(\vec{a}, \vec{b}) = \{i \mid a_i = b_i = 0\}$,
$Equ^1(\vec{a}, \vec{b}) = \{i \mid a_i = b_i = 1\}$,
$Equ(\vec{a}, \vec{b}) = \{i \mid a_i = b_i\} = Equ^0(\vec{a}, \vec{b}) \cup Equ^1(\vec{a}, \vec{b})$,
et
$Dif^{10}(\vec{a}, \vec{b}) = \{i \mid a_i = 1, b_i = 0\}$,
$Dif^{01}(\vec{a}, \vec{b}) = \{i \mid a_i = 0, b_i = 1\}$;
$Dif(\vec{a}, \vec{b}) = \{i \mid a_i \neq b_i\} = Dif^{01}(\vec{a}, \vec{b}) \cup Dif^{10}(\vec{a}, \vec{b})$.

Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant :

$$A(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \text{si et seulement si } \begin{cases} Equ(\vec{a}, \vec{b}) = Equ(\vec{c}, \vec{d}) \\ Dif^{10}(\vec{a}, \vec{b}) = Dif^{10}(\vec{c}, \vec{d}) \\ Dif^{01}(\vec{a}, \vec{b}) = Dif^{01}(\vec{c}, \vec{d}) \end{cases}$$

On voit que ce qui importe dans une analogie c'est l'orientation des différences, alors que peu importe la valeur avec laquelle l'égalité est réalisée. La Table 2 met en évidence la structure d'une proportion analogique, en trois sous-ensembles d'attribut(s), un où les 4 items sont égaux, un où ils sont égaux à l'intérieur des paires, mais pas de la même manière, et enfin le sous-ensemble d'attribut(s) dont la/les valeur(s) change(nt), dans le même sens, en passant de $\vec{a}$ à $\vec{b}$ et de $\vec{c}$ à $\vec{d}$.

items	*Tous égaux*	*Egal. par paires*	*Chang.*
$\vec{a}$	1 0	1 0	1 0
$\vec{b}$	1 0	1 0	0 1
$\vec{c}$	1 0	0 1	1 0
$\vec{d}$	1 0	0 1	0 1

TABLE 2 – Les 3 parties d'une proportion analogique et les valuations associées

Comme on peut le voir, la permutation centrale de $\vec{b}$ et de $\vec{c}$ échange les sous-ensembles d'"Egalité par paires" et de "Changement". Aucun de ces deux sous-ensembles ne doit être vide si on veut que la proportion analogique soit non triviale, c'est-à-dire que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ soient distincts (pour $n = 2$, $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = (0, 1)$, $\vec{d} = (0, 0)$ réalisent une proportion analogique avec des vecteurs distincts). Par contre, le sous-ensemble d'attribut(s) "Tous égaux" peut être vide. Si le sous-ensemble "Egalité par paires" ou bien le sous-ensemble "Changement" est vide, alors $\vec{a} = \vec{c}$ et $\vec{b} = \vec{d}$ ou bien $\vec{a} = \vec{b}$ et $\vec{c} = \vec{d}$ respectivement.

Etant donnés 4 vecteurs distincts, ils constituent deux paires ordonnées $(\vec{a}, \vec{b})$ et $(\vec{c}, \vec{d})$ dans la même classe d'équivalence de A (rappelons que A est réflexive, symétrique et transitive) si et seulement si [4] :

1. $Dif(\vec{a}, \vec{b}) = Dif(\vec{c}, \vec{d})$;
2. $\forall j \in Dif(\vec{a}, \vec{b})\ a_j = c_j$ et $b_j = d_j$.

La condition 1 assure que les changements concernent les mêmes attributs dans les deux paires, la condition 2 qu'ils s'appliquent dans le même sens pour les deux paires. Il est clair que deux paires quelconques prises dans la même classe d'équivalence forment ensemble une proportion analogique. Cette notion de classe d'"équivalence rejoint l'idée de "cluster analogique" introduite par [7] dans un contexte de linguistique computationnelle.

Tandis que la proportion analogique insiste sur l'identité des différences existant dans chaque paire, la paralogie exprime plutôt un parallèle entre les paires au plan des propriétés partagées, positivement ou négativement. C'est ce que traduit le résultat suivant, dual de celui pour l'analogie :

$$P(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \text{ si et seulement si } \begin{cases} Dif(\vec{a}, \vec{b}) = Dif(\vec{c}, \vec{d}) \\ Equ^1(\vec{a}, \vec{b}) = Equ^1(\vec{c}, \vec{d}) \\ Equ^0(\vec{a}, \vec{b}) = Equ^0(\vec{c}, \vec{d}) \end{cases}$$

4. Si les vecteurs ne sont pas distincts, on doit ajouter la condition $Dif(\vec{a}, \vec{b}) \neq \emptyset$ et $\exists i\ a_i \neq c_i$.

3.2 Combiner des relations entre paires

Une forme de raisonnement entre paires est obtenue en étudiant les "combinaisons" de relations entre paires exprimées par les proportions homogènes, au sens suivant :

$$T(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \wedge T'(\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}) \to T''(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}, \vec{f})$$

où $T, T', T'' \in \{A, P, I, R\}$.

Cette forme de "combinaisons" généralise l'idée de transitivité. On a déjà vu que A et P sont transitives.

	A	P	R	I
A	A	K	R	K
P	K	P	K	I
R	R	K	A	K
I	K	I	K	P

TABLE 3 – Combinaison de proportions homogènes

La Table 3 résume tous les résultats des combinaisons qu'on peut obtenir à partir de $\{A, P, R, I\}$. Ces combinaisons étant commutatives, la table est symétrique. Le résultat K indique l'opérateur de Klein rappelé en Section 2, un résultat donc trivial (rappelons que K n'est pas une proportion logique). En permutant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, on peut faire apparaitre les résultats non triviaux sur les deux diagonales :

	A	P	I	R
A	A	K	K	R
P	K	P	I	K
I	K	I	P	K
R	R	K	K	A

En dehors des transitivités de A et P, les autres résultats sont conformes aux idées de "parallèlisme" pour P et d'"orthogonalité" pour I. En effet, P $\wedge$ I $\to$ I et I $\wedge$ I $\to$ P. Notons aussi que R $\wedge$ R $\to$ A, ce qui est conforme à l'idée que deux renversements successifs ramènent à l'endroit.

3.3 Relation de conséquence entre paires ordonnées

Les connecteurs logiques s'étendent à des vecteurs composante par composante. On a donc

— $\neg\vec{a} = (\neg a_1, ..., \neg a_n)$,
— $\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 \wedge b_1, ..., a_n \wedge b_n)$,
— $\vec{a} \vee \vec{b} = (a_1 \vee b_1, ..., a_n \vee b_n)$.

En s'inspirant du cas des proportions conditionnelles, on est amené à définir composante par composante la relation de conséquence logique suivante (encore notée $\vDash$) entre paires ordonnées $(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d})$ à partir de la définition de la proportion analogique de la manière suivante [5] :

$$\neg\vec{a} \wedge \vec{b} \vDash \neg\vec{c} \wedge \vec{d} \text{ et } \vec{c} \wedge \neg\vec{d} \vDash \vec{a} \wedge \neg\vec{b} \quad (3)$$

Quand on considère des paires $(\vec{a}, \vec{b})$, une valuation $(a_i, b_i) = (0, 1)$ peut être interprétée comme le fait que l'on acquiert la propriété i quand on passe de $\vec{a}$ à $\vec{b}$. Donc le sens de la conséquence logique devient :
— Les propriétés acquises quand on passe de $\vec{a}$ à $\vec{b}$ restent acquises quand on passe de $\vec{c}$ à $\vec{d}$,
— De plus, si une propriété est perdue en passant de $\vec{c}$ à $\vec{d}$, c'était déjà le cas dans le passage de $\vec{a}$ à $\vec{b}$ [6].
Naturellement $(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{a}, \vec{b})$, mais de plus :

Proposition 5 *On a l'équivalence suivante :*

$$(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d}) \text{ et } (\vec{c}, \vec{d}) \vDash (\vec{a}, \vec{b}) \text{ ssi } A(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

Preuve. Voyons le sens précis de cette définition pour les paires. Comme nous travaillons composante par composante, il suffit de considérer la conséquence de cette définition sur une composante. Deux cas sont à considérer :
— cas $a = b$ (qui représente 8 valuations parmi les 16 candidates for a, b, c, d). Puisque $\neg a \wedge b$ et $a \wedge \neg b$ sont égaux à 0, la seule contrainte est que $c \wedge \neg d = 0$ qui est satisfaite seulement si $(c, d) \neq (1, 0)$, ce qui élimine (0010) et (1110) comme valuations valides, laissant 6 valuations encore valides.
— cas $a \neq b$ (qui représente les 8 valuations restantes) : si $(a, b) = (1, 0)$, il n'y a pas de contrainte sur (c, d). Si $(a, b) = (0, 1)$, seulement $(c, d) = (0, 1)$ est valide, ce qui élimine 3 valuations parmi les 8 : (0100), (0110), (0111).
La conjonction $(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d})$ et $(\vec{c}, \vec{d}) \vDash (\vec{a}, \vec{b})$, conduit à la table de vérité de $A(a, b, c, d)$ avec exactement 6 valuations valides. □

Puisque quand $(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d})$, les 5 valuations $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$ sont *interdites* pour chaque composante (a_i, b_i, c_i, d_i), cela signifie que
— $(a_i, b_i) = (0, 1) \Rightarrow (c_i, d_i) = (0, 1)$; (une propriété acquise en passant de $\vec{a}$ à $\vec{b}$ doit être aussi acquise en allant de $\vec{c}$ à $\vec{d}$) ;
— $a_i = b_i \Rightarrow (c_i, d_i) \neq (1, 0)$ (quand il n' y a pas acquisition de propriété ou qu'il y a une perte de propriété en allant de $\vec{a}$ à $\vec{b}$, il ne peut pas y avoir une perte en allant de $\vec{c}$ à $\vec{d}$).

De manière similaire, on a $(\vec{c}, \vec{d}) \vDash (\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} (a_i, b_i) = (1, 0) \Rightarrow (c_i, d_i) = (1, 0) \\ a_i = b_i \Rightarrow (c_i, d_i) \neq (0, 1) \end{cases}$
qui interdit les 5 valuations $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$.
On a donc, comme attendu :
$(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d})$ et $(\vec{c}, \vec{d}) \vDash (\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow A(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$.

Remarque. *Preuve ensembliste*. Puis qu'on parle ci-dessus de propriétés (acquises), il peut être intéressant d'introduire explicitement les ensembles de propriétés qui caractérisent chaque item, et de faire une preuve ensembliste. Pour varier (un peu !), nous établissons ci-après la Proposition 5, *dans le cas où on utilise pour la conséquence logique la définition de la note en bas de page numéro* 6 qui privilégie la perte de propriété.

Pour ce faire on introduit $A = \{i \mid a_i = 1\}$, $B = \{i \mid b_i = 1\}$, $C = \{i \mid c_i = 1\}$, et $D = \{i \mid d_i = 1\}$. La definition $\vDash$ ci-dessus se traduit alors en

$$A \cap \overline{B} \subseteq C \cap \overline{D} \text{ et } \overline{C} \cap D \subseteq \overline{A} \cap B$$

Les deux conditions d'inclusion peuvent se réécrire

$$\begin{aligned}
& A \cap \overline{B} \cap (\overline{C} \cup D) = \emptyset \text{ et } \overline{C} \cap D \cap (A \cup \overline{B}) = \emptyset \\
& \Leftrightarrow \\
& A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = \emptyset \text{ et } A \cap \overline{B} \cap D = \emptyset \\
& \text{et } \overline{C} \cap D \cap A = \emptyset \text{ et } \overline{C} \cap D \cap \overline{B} = \emptyset \\
& \Leftrightarrow \\
& (A \cup D) \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \emptyset \text{ et } (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap A \cap D = \emptyset \\
& \Leftrightarrow \\
& A \cap D \subseteq B \cap C \text{ et } A \cup D \subseteq B \cup C.
\end{aligned}$$

En utilisant l'équivalence ci-dessus, on peut vérifier que quand lorsque $(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d})$, les 5 valuations $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$ sont *interdites* pour chaque composante (a_i, b_i, c_i, d_i). Ceci signifie que
— $(a_i, b_i) = (1, 0) \Rightarrow (c_i, d_i) = (1, 0)$;
— $a_i = b_i \Rightarrow (c_i, d_i) \neq (0, 1)$

En d'autres termes, tout changement de 1 vers 0 dans $(\vec{a}, \vec{b})$ existe aussi dans $(\vec{c}, \vec{d})$, et sur les composantes où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont égaux, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont égaux ou présentent ce même changement de 1 vers 0. De même, $(\vec{c}, \vec{d}) \vDash (\vec{a}, \vec{b})$ est équivalent à :
$\begin{cases} (a_i, b_i) = (0, 1) \Rightarrow (c_i, d_i) = (0, 1) \\ a_i = b_i \Rightarrow (c_i, d_i) \neq (1, 0) \end{cases}$
qui interdit les 5 valuations $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$. On a donc bien, comme attendu :
$(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d})$ et $(\vec{c}, \vec{d}) \vDash (\vec{a}, \vec{b})$ ssi $A(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. □

3.4 Logiques trivaluées et connecteurs de paires

Une façon naturelle d'associer une tri-valuation à une paire ordonnée $(\vec{a}, \vec{b})$, du point de vue de l'analogie, est de faire la différence des vecteurs pour obtenir

5. Remarquons que si on note $\vec{\mathbb{1}}$ le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, alors $(\vec{\mathbb{1}}, \vec{b}) \vDash (\vec{\mathbb{1}}, \vec{d})$ se réduit à $\vec{b} \vDash \vec{d}$, ce qui correspond à la relation de conséquence propositionnelle classique.

6. Le choix de la définition (3), plutôt que $(\vec{a}, \vec{b}) \vDash (\vec{c}, \vec{d}) \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \neg\vec{b} \vDash \vec{c} \wedge \neg\vec{d}$ et $\neg\vec{c} \wedge \vec{d} \vDash \neg\vec{a} \wedge \vec{b}$, est gouverné par le besoin de privilégier l'acquisition de propriétés plutôt que leur perte.

un vecteur $val_A(\vec{a},\vec{b}) = (a_1-b_1, ..., a_n-b_n) \in \{-1,0,1\}^n$.

On peut alors vérifier que si $A(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ est vrai, on a

$$(\vec{a}\wedge\vec{c})-(\vec{b}\wedge\vec{d}) = val_A(\vec{a},\vec{b}) = val_A(\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a}\vee\vec{c})-(\vec{b}\vee\vec{d}).$$

Cela suggère de définir (composante par composante) :

$$\begin{aligned}
&(\vec{a},\vec{b}) \wedge (\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a}\wedge\vec{c}, \vec{b}\wedge\vec{d})\\
&(\vec{a},\vec{b}) \vee (\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a}\vee\vec{c}, \vec{b}\vee\vec{d})\\
&\neg(\vec{a},\vec{b}) = (\neg\vec{a},\neg\vec{b})
\end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$(\vec{a},\vec{b}) \wedge (\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{b}) \vee (\vec{a},\vec{b})$$

Notons que $\neg(\vec{a},\vec{b}) \neq (\vec{b},\vec{a})$ en général.

Cependant on peut observer que

$$(\vec{a},\vec{b}) \wedge (\vec{c},\vec{d}) \not\models (\vec{a},\vec{b}) \not\models (\vec{a},\vec{b}) \vee (\vec{c},\vec{d}).$$

C'est simplement parce qu'une propriété acquise de $\vec{a}\wedge\vec{c}$ vers $\vec{b}\wedge\vec{d}$ peut ne pas l'être en passant de $\vec{a}$ à $\vec{b}$. Partant de l'exemple $(a_i,b_i,c_i,d_i) = (1,1,0,1)$, on obtient $(a_i\wedge c_i, b_i\wedge d_i) = (0,1)$, la propriété i est acquise dans le passage de $\vec{a}\wedge\vec{c}$ à $\vec{b}\wedge\vec{d}$, mais elle ne l'est pas dans le passage de $\vec{a}$ à $\vec{b}$: $(0,1) \not\models (1,1)$. [7]

En fait, la relation de conséquence logique $\models$ définie par (3) préserve les paires de la forme $(0,1)$, tandis que la conjonction des paires préserve $(0,1)$ si $(0,1)$ apparait des deux côtés de la conjonction, mais aussi quand une des paires est égale à $(1,1)$, pour la même propriété. Cela nous conduit à introduire un nouvel opérateur $\wedge\!\vee$ utilisant à la fois conjonction et disjonction :

$$(\vec{a},\vec{b}) \wedge\!\vee (\vec{c},\vec{d}) \triangleq (\vec{a}\wedge\vec{c}, \vec{b}\vee\vec{d})$$

Si la notion de conséquence logique entre paires fait sens, l'intuition derrière cette conjonction / disjonction reste plus fragile. On peut noter que $(a_i\wedge c_i, b_i\vee d_i) = (1,0)$ seulement si $(a_i,b_i) = (c_i,d_i) = (1,0)$. Par contraste, si (a_i,b_i) or $(c_i,d_i) = (0,1)$, $(a_i\wedge c_i, b_i\vee d_i) = (0,1)$.

De manière duale, on peut définir :

$$(\vec{a},\vec{b}) \vee\!\wedge (\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a}\vee\vec{c}, \vec{b}\wedge\vec{d})$$

Notons que $(a_i\vee c_i, b_i\wedge d_i) = (0,1)$ seulement si $(a_i,b_i) = (c_i,d_i) = (0,1)$. Mais, si on a (a_i,b_i) ou $(c_i,d_i) = (1,0)$, alors $(a_i\vee c_i, b_i\wedge d_i) = (1,0)$. On peut alors vérifier que $\vee\!\wedge$ se comporte comme une conjonction et $\wedge\!\vee$ comme une disjonction, au sens où :

Proposition 6

$$(\vec{a},\vec{b}) \vee\!\wedge (\vec{c},\vec{d}) \models (\vec{a},\vec{b}) \models (\vec{a},\vec{b}) \wedge\!\vee (\vec{c},\vec{d})$$

où $\models$ est défini par (3).

Preuve. On doit d'abord montrer que $(a\vee c, b\wedge d) \models (a,b)$. Ce qui tient en effet puisque on a 1. $\neg(a\vee c)\wedge b\wedge d \models \neg a\wedge b$; 2. $a\wedge\neg b \models (a\vee c)\wedge\neg(b\wedge d)$.

Reste à vérifier que $(a,b) \models (a\wedge c, b\vee d)$. On a bien en effet 1. $\neg a\wedge b \models \neg(a\wedge c)\wedge(b\vee d)$; 2. $a\wedge c\wedge\neg(b\vee d) \models a\wedge\neg b$. □

Remarque On pourrait aussi définir une conséquence logique en partant de la paralogie, telle que $(\vec{a},\vec{b}) \models_P (\vec{c},\vec{d})$ ssi $\vec{a}\wedge\vec{b} \models \vec{c}\wedge\vec{d}$ et $\neg\vec{c}\wedge\neg\vec{d} \models \neg\vec{a}\wedge\neg\vec{b}$, ou alternativement $(\vec{a},\vec{b}) \models'_P (\vec{c},\vec{d})$ ssi $\neg\vec{a}\wedge\neg\vec{b} \models \neg\vec{c}\wedge\neg\vec{d}$ et $\vec{c}\wedge\vec{d} \models \vec{a}\wedge\vec{b}$. De plus, la tri-valuation naturellement associée avec une paire, du point de vue de la paralogie, serait $val_P(\vec{a},\vec{b}) = (a_1+b_1, ..., a_n+b_n) \in \{0,1,2\}^n$. L'étude de ces notions de conséquence logique et des logiques associées est laissée à plus tard.

3.5 Vers une logique de la créativité

Considérons un ensemble S un ensemble de profils décrivant des individus ou items existants et $P \subset S\times S$ un sous-ensemble représentatif de paires ordonnées qui illustrent des changements "intéressants" entre profils. P constitue ainsi une base de connaissance sur des changements réalisables. En d'autres termes, un vecteur est le profil d'un item existant, et chaque paire ordonnée de vecteurs peut être interprétée comme représentant des changements possibles/légitimes entre deux profils. Plus précisément, P est constitué de k paires $(\vec{a}^j,\vec{b}^j)$ avec $j = 1,k$, où chaque vecteur est une représentation booléenne d'une paire d'individus appartenant à un univers réel.

Etant donnée un profil $\vec{c}\in S$, on peut se demander si on pourrait obtenir de nouveaux profils plausibles $\vec{d}\notin S$ sur la base des changements possibles déjà observés sur l'ensemble P. Ces nouveaux profils seraient des représentants légitimes d'individus réalisables. La réponse pourrait être l'ensemble des solutions (si elles existent)

$$\vec{d} \in \{\vec{x^j} \mid A(\vec{a}^j,\vec{b}^j,\vec{c},\vec{x^j}) \text{ pour } j = 1,k\}$$

Dans le cas où aucune solution n'est trouvée, on pourrait élargir la base de connaissance initiale formée des paires d'éléments de S en calculant toute ou partie de la fermeture de l'opérateur $\wedge\!\vee$ tel que défini dans la section précédente.

7. Il y a deux autres cas de violation quand $(a_i,b_i) = (1,0)$: $(c_i,d_i) = (0,0)$ ou $(c_i,d_i) = (0,1)$, on obtient $(a_i\wedge c_i, b_i\wedge d_i) = (0,0)$, et $(0,0) \not\models (1,0)$. Enfin, $(\vec{a},\vec{b}) \not\models (\vec{a},\vec{b}) \vee (\vec{c},\vec{d})$ dans 3 situations possibles : i) $(a_i,b_i) = (0,0)$, $(c_i,d_i) = (1,0)$ et $(0,0) \not\models (1,0)$; ii) & iii) $(a_i,b_i) = (0,1)$, $(c_i,d_i) = (1,1)$ ou $(c_i,d_i) = (1,0)$, et $(0,1) \not\models (1,1)$.

Cette opération a le mérite de "*cumuler*" les acquisitions de propriétés. [8]

Cette manière de raisonner établit un parallèle avec le raisonnement non monotone sur des objets conditionels, où, à partir d'une base de règles par défaut "si a^j alors b^j" représentée par un ensemble d'objets conditionels $b^j|a^j$, on déduit un nouvel objet conditionel $d|c$, par la conséquence logique définie par (3) et la conjonction &, où c correspond à ce que l'on sait dans le contexte courant, et pour lequel on peut conclure d [4].

4 Premières expérimentations

Cette approche ne prend son sens pratique que lorsque l'on s'intéresse à des représentations booléennes de relativement grande dimension. En effet, dans ce contexte, les données dont on dispose sont en général peu nombreuses en regard de l'univers dans sa totalité. Par exemple pour des vecteurs de dimension 30, l'espace des profils possibles est de taille $2^{30} \sim 10^9$. Si on possède un échantillon S de taille 1000, il est naturel de s'intéresser à une extension "raisonnable" de l'échantillon. C'est là qu'intervient d'abord l'analogie avec l'extension analogique qui consiste à compléter l'ensemble des exemples de départ, comme par exemple dans [2]. Mais si l'analogie ne fournit pas suffisamment de nouveaux éléments, on pourrait alors mettre en oeuvre, dans un premier temps, la conséquence logique des paires, vu comme un moyen d'affaiblir la contrainte analogique de la manière suivante :

— Toute paire $(\vec{a}, \vec{b})$ de l'échantillon représente une variation possible des profils.
— Toute paire $(\vec{c}, \vec{d})$ telle que $(\vec{a}, \vec{b}) \models (\vec{c}, \vec{d})$ peut être considérée éventuellement comme la description d'une variation candidate des profils.

En l'absence d'un algorithme efficace, la tâche de générer des conséquences logiques peut s'avérer très complexe. On peut cependant d'abord s'interroger sur l'existence, au sein de l'échantillon P, de paires $(\vec{c}, \vec{d})$ qui sont conséquence logique d'une autre paire $(\vec{a}, \vec{b})$ dans P ici pris égal à $S \times S$. Afin de répondre à cette question, nous avons réalisé des expériences en dimension 10 et 30 (avec des temps d'exécution raisonnables) en variant la taille de l'échantillon S. Nous avons ensuite calculé en moyenne sur 10 tests, le nombre de paires $(\vec{c}, \vec{d})$ qui sont conséquence logique d'une autre paire.

On constate que le ratio $\frac{\#cons.log.}{\#paires}$ est toujours faible : donc il existe relativement peu de paires conséquence logique l'une de l'autre à l'intérieur de P.

Dim	Taille S	# paires	# tests	# cons. log.
10	50	1225	10	32
10	100	4950	10	120
30	100	4950	10	1
30	500	124750	10	2200

TABLE 4 – Nombre de paires conséquences logiques à l'intérieur de l'échantillon S

Une deuxième expérience consiste à résoudre l'équation $(\vec{a}, \vec{b}) \models (\vec{c}, \vec{d})$ où $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont dans S et on recherche au moins un $\vec{d}$ s'il existe, qui ne soit pas dans S. Là encore :

— Toute paire $(\vec{a}, \vec{b})$ de l'échantillon représente une variation possible des profils.
— Etant donné un autre profil $\vec{c}$ de S, un profil $\vec{d} \notin S$ tel que $(\vec{a}, \vec{b}) \models (\vec{c}, \vec{d})$ peut être considéré comme plausible et être ajouté à l'échantillon initial.

Nous avons expérimenté en dimension 10, 30 et 50 avec diverses tailles d'échantillon. Pour chaque paire $(\vec{a}, \vec{b})$, nous comptons le nombre total de $\vec{d}$ pour lesquels il existe un $\vec{c} \in S$ tel que $(\vec{a}, \vec{b}) \models (\vec{c}, \vec{d})$. Nous moyennons ce nombre à la fois sur le nombre de paires et le nombre de tests.

Dim.	Taille S	# paires	# tests	# $\vec{d} \in S$	# $\vec{d} \notin S$
10	50	1225	100	1	13
10	100	4950	100	3	25
30	100	4950	100	0	4
30	500	124750	100	0	9
50	100	4950	100	0	2
50	500	124750	100	0	2

TABLE 5 – Nombre de vecteurs $\vec{d}$ solutions de l'équation

On constate que, en dimension 50, la taille de S est très faible en regard de la taille de l'univers 2^{50} et que dans ce cas, en moyenne, une paire $(\vec{a}, \vec{b})$ sera susceptible de produire très peu de nouveaux vecteurs $\vec{d}$. Cela signifie que l'équation n'a pas de solution en général.

On peut enfin utiliser l'opérateur $\wedge\!\vee$ vu comme créateur de paires. On va compter dans la Table 6 combien de paires totalement nouvelles sont créées quand on applique l'opérateur $\wedge\!\vee$ à toutes les paires issues de l'échantillon S. A ce stade, on n'élimine pas les paires où apparaîtrait au moins une composante $(0, 0) \wedge\!\vee (1, 1)$ ou $(1, 1) \wedge\!\vee (0, 0)$. Cf. note de bas de page numéro 8.

Puisque les paires obtenues ne sont retenues que si les 2 vecteurs qui la constituent ne sont pas dans S, on a construit au moins $\#nouvellespaires$ nouveaux vecteurs (un nouveau vecteur pouvant apparaître dans plusieurs nouvelles paires). Cependant, le ratio $\frac{\#nouvellespaires}{\#paires}$ semble diminuer quand on augmente la taille de S.

Le raisonnement analogique ne conduit qu'à des conséquences plausible. Son usage pour la créativité n'échappe pas à cette règle. Il sera certainement utile en pratique de vérifier, d'une manière ou d'une autre, la réalisabilité de ces nouvelles paires.

8. Cumulatif veut dire ici que si $(a_i, b_i) = (0, 1)$ et $(c_j, d_j) = (0, 1)$ alors les composantes i et j de $(\vec{a}, \vec{b}) \wedge\!\vee (\vec{c}, \vec{d})$ sont aussi égales à $(0, 1)$. Notons cependant que $(0, 0) \wedge\!\vee (1, 1) = (1, 1) \wedge\!\vee (0, 0) = (0, 1)$ peut créer un changement non légitime ; dans ce cas, la paire générée ne doit pas être considérée dans la suite du processus.

Dim.	Taille S	# paires	# tests	# nouvelles paires
10	50	1225	10	334
10	100	4950	10	547
30	100	4950	10	9300
30	500	124750	10	Non Disponible
50	100	4950	10	9700
50	500	124750	10	Non Disponible

TABLE 6 – Nombre de paires déduites formées de vecteurs n'apparaissant pas dans S

5 Remarques de conclusion

Cette note a commencé à explorer l'idée que les proportions logiques en tant que connecteurs quaternaires pouvaient être aussi vues comme définissant des relations entre paires ordonnées, et que, de la même façon qu'une logique (tri-valuée) des objets conditionnels se trouvait associée à des proportions conditionelles, il était concevable d'explorer la possibilité d'une logique de paires en association avec des proportions logiques homogènes.

Cela a permis de mettre en évidence l'idée de classe d'équivalence de paires, pour les proportions analogiques (qui pourrait être aussi développée pour les proportions paralogiques). Quelques résultats ont été présentés sur la composition de relations entre paires, ainsi qu'une relation de conséquence logique entre paires.

Il est clair que nous n'en sommes qu'aux premiers balbutiements de la construction d'une logique de paires. Une question évidemment importante concerne l'usage pratique d'une telle logique. Comme les proportions logiques homogènes sont créatives au sens où à partir de 3 vecteurs distincts on peut produire un 4 ème vecteur différent des 3 premiers [9], on peut se demander comment elle pourrait contribuer à une logique de la créativité.

Remerciements

Le premier auteur remercie Jean Lieber pour avoir attiré à plusieurs reprises son attention sur l'intérêt potentiel de développer une logique de paires ordonnées. Mais ce n'est qu'en remarquant - enfin - que les proportions analogiques définissaient une relation d'équivalence entre deux paires ordonnées, tout comme la logique des objets conditionnels a pour point de départ l'équivalence de deux objets conditionnels (ce qui constitue un autre type de proportion logique), que le premier auteur a entrevu la possibilité de la logique des paires ordonnées présentée ici.

Cette recherche a bénéficié du soutien du projet ANR "Analogies : de la théorie aux outils et aux applications" (AT2TA), ANR-22-CE23-002.

9. Pourvu que les équations $T(a_i, b_i, c_i, x)$ aient des solutions.

Références

[1] Benferhat, S., D. Dubois et H. Prade: *Nonmonotonic reasoning, conditional objects and possibility theory*. Artificial Intelligence, 92(1-2) :259–276, 1997.

[2] Couceiro, M., N. Hug, H. Prade et G. Richard: *Analogy-preserving functions : A way to extend Boolean samples*. Dans Sierra, C. (rédacteur) : *Proc. 26th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'17), Melbourne, Aug. 19-25*, pages 1575–1581, 2017.

[3] De Finetti, B.: *La logique des probabilités*. Dans *Congrès Int. de Philosophie Scientifique, IV. Induction et probabilité*, pages 31–39, Paris,, 1936. Hermann.

[4] Dubois, D. et H. Prade: *Conditional objects as nonmonotonic consequence relationships*. IEEE Trans. on Syst., Man and Cyber., 24 :1724–1740, 1994.

[5] Klein, S.: *Analogy and mysticism and the structure of culture (and Comments & Reply)*. Current Anthropology, 24 (2) :151–180, 1983.

[6] Kraus, S., D. Lehmann et M. Magidor: *Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics*. Artificial Intelligence, 44 :167–207, 1990.

[7] Lepage, Y. et C.-L. Goh: *Towards automatic acquisition of linguistic features*. Dans Jokinen, K. et E. Bick (rédacteurs) : *Proc. 17th Nordic Conf. of Computational Linguistics, NODALIDA'09, Odense, Denmark, May 14-16*, pages 118–125. Northern European Association for Language Technology (NEALT), 2009.

[8] Miclet, L. et H. Prade: *Handling analogical proportions in classical logic and fuzzy logics settings*. Dans *Proc. 10th Eur. Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'09),Verona*, pages 638–650. Springer, LNCS 5590, 2009.

[9] Prade, H. et G. Richard: *Homogeneous logical proportions : Their uniqueness and their role in similarity-based prediction*. Dans Brewka, G., T. Eiter et S. A. McIlraith (rédacteurs) : *Proc. 13th Int. Conf., Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'12), Rome, June 10-14*, pages 402–412. AAAI Press, 2012.

[10] Prade, H. et G. Richard: *From analogical proportion to logical proportions*. Logica Universalis, 7(4) :441–505, 2013.

[11] Prade, H. et G. Richard: *Homogenous and heterogeneous logical proportions*. IfCoLog J. of Logics and their Applications, 1(1) :1–51, 2014.