Morpho-logique d'un point de vue de la théorie des topos : application à l'IA symbolique

Marc Aiguier[1] **Isabelle Bloch**[2] **Salim Nibouche**[1] **Ramón Pino Pérez**[3]

[1] MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, France
[2] Sorbonne Université, CNRS, LIP6, Paris, France
[3] CRIL-CNRS, Université d'Artois, France
{marc.aiguier,salim.nibouche}@centralesupelec.fr
isabelle.bloch@sorbonne-universite.fr
pinoperez@cril.fr

Résumé

La morphologie mathématique (MM) est une théorie non linéaire d'analyse de structures qui a été largement appliquée à l'analyse d'images. Les fondements mathématiques de la MM proviennent de l'algèbre, de la théorie des treillis complets ou encore de la topologie. Depuis une vingtaine d'années, de forts liens ont été établis entre la MM et la logique mathématique, et principalement la logique modale. Dans ce cadre, les modalités de nécessité $\Box$ et de possibilité $\Diamond$ sont interprétées par les deux opérations de base de la MM d'érosion et de dilatation. Il a alors été montré que cette interprétation facilitait les raisonnements logiques non classiques tels que la révision, la fusion, l'abduction ou encore le raisonnement spatial. Dans cet article, nous proposons d'étendre ce lien entre la MM et la logique modale au cadre de la théorie algébrique des topos élémentaires, i.e. une structure catégorielle généralisant la notion d'espace, et permettant de connecter dans un même cadre général la logique, la théorie des ensembles et la topologie. Nous montrons alors que la logique modale ainsi définie (appelée morpho-logique ici), est bien adaptée pour définir des opérateurs concrets et efficaces pour la révision, la fusion, et l'abduction de nouvelles connaissances, ou encore le raisonnement spatial.

Abstract

Mathematical morphology (MM) is a theory for non-linear analysis of structures, that was widely developed and applied in image analysis. Its mathematical bases rely on algebra, complete lattices, topology. Strong links have been established between MM and mathematical logics, mostly modal logics. Necessity $\Box$ and possibility $\Diamond$ modalities are then interpreted by the two basic MM operators, namely erosion and dilation. This interpretation allows for easy formulations of non-classical reasoning, including revision, merging, abduction, spatial reasoning. In this paper, we propose to extend this link between MM and modal logics in the setting of algebraic theory of topos, i.e. a categorical structure that generalizes the notion of space, and unifies in a same general framework logics, set theory and topology. We demonstrate that the modal logic we define (called morpho-logic) is well suited to define concrete and efficient operators for revision, merging (or fusion), abduction of new knowledge, as well as spatial reasoning.

1 Introduction

La morphologie mathématique (MM) [35, 36] est une théorie non linéaire d'analyse de structures qui a été largement appliquée à l'analyse d'images. Les fondements mathématiques de la MM, dans son cadre déterministe, proviennent de l'algèbre, de la théorie des treillis complets ou encore de la topologie. Depuis une vingtaine d'années, de forts liens ont été établis entre la MM et la logique mathématique, et principalement la logique modale [1, 11, 15]. Dans ce cadre, les modalités de nécessité $\Box$ et de possibilité $\Diamond$ sont interprétées par les deux opérations de base de la MM d'érosion et de dilatation. Il a alors été montré que cette interprétation facilitait les raisonnements logiques non classiques tels que la révision, la fusion, l'abduction [2, 3, 15, 22] ou encore le raisonnement spatial [1, 11].

L'érosion et la dilatation sont souvent définies à partir d'un élément structurant B utilisé pour sonder les structures spatiales, soit pour les éroder, soit pour les dilater. Plus formellement, dans le cas particulier des ensembles, pour E un espace euclidien (souvent $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$ où d est la dimension de l'espace), et B (l'élément structurant) un sous-ensemble de E, si nous notons $B_x = \{x + b \mid b \in B\}$ sa translation au point $x \in E$, alors la dilatation d'un ensemble X par B est définie par $\delta[B](X) = \{x \in E \mid \check{B}_x \cap X \neq \emptyset\}$ où $\check{B}$ est le symétrique de B par rapport à l'origine, et l'érosion de X par $\varepsilon[B](X) = \{x \in E \mid B_x \subseteq X\}$. Observons que B peut aussi être vu comme une relation binaire sur E : $B(x, y)$ ssi $y \in B_x$. Dans ce cadre ensembliste, nous avons les propriétés suivantes [1] :

— l'érosion commute avec l'intersection et préserve E,
— la dilatation commute avec la réunion et préserve $\emptyset$,
— l'érosion et la dilatation définies par un même élément structurant sont des opérateurs duaux.

Ainsi, le tuple $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \_^c, \emptyset, E, \varepsilon[B], \delta[B])$ est une algèbre modale. Par cette interprétation, la logique modale devient un outil puissant pour parler de transformations d'espace, et c'est dans ce cadre que la morpho-logique a été appliquée efficacement à l'intelligence artificielle (IA) symbolique [4, 11, 12].

Jusqu'à présent, ce lien entre la logique modale et la MM a été étudié dans le cadre ensembliste (avec des extensions aux ensembles flous). Depuis, la MM a été étendue à une large famille de structures algébriques telles que les graphes [19, 20, 31, 37], les hypergraphes [13, 14], les complexes simpliciaux [21], etc. Toutes ces extensions se sont montrées très utiles pour la représentation des connaissances, prenant en compte un faible niveau d'information (points ou voisinage de points), des informations structurelles (par exemple fondées sur des relations spatiales entre régions ou objets), des aspects sémantiques, etc. Ce que nous constatons alors est que l'ensemble de ces extensions se définissent de façon générale par la notion de préfaisceau, i.e. un foncteur contravariant $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ où la catégorie de base $\mathcal{C}$ est petite [2], et Set est la catégorie des ensembles. Il est connu que la catégorie des préfaisceaux sur une catégorie de base petite est un topos complet. Pour aller plus loin dans la généralisation, nous proposons alors d'approfondir ce lien entre la logique modale et la MM dans le cadre de la théorie des topos. Les topos constituent des structures catégorielles définies par A. Grothendieck au début des années 1960 [24], qui généralisent la notion d'espace. Ainsi, comme l'a remarqué O. Caramello dans [18], tout topos incarne un certain domaine de la réalité susceptible de devenir des objets de connaissances (i.e. les instanciations idéalisées de cette réalité sont alors les points de ce topos). Cette interprétation toposique permettra alors de donner une sémantique avec une "saveur" topologique aux modalités classiquement utilisées pour le raisonnement spatial, et qui ne peut pas s'obtenir directement à partir des érosions et dilatations, ni de leur composition (on parle alors d'ouverture et de fermeture). Dans [23], la MM à partir d'éléments structurants a été étendue à la notion de voisinage proche de la notion classique en topologie. Nous proposons dans cet article d'étendre ce travail défini dans un cadre ensembliste à celui des topos. Cette extension nous permettra de donner une sémantique toposique de voisinage à la logique modale constructive CS4 [8, 30, 38].

Les topos, et plus précisément les topos élémentaires de Lawvere et Tierney [28], sont introduits de façon succincte dans la section 2. Dans la section 3, la MM est étendue au cadre des topos. La section 4 est dédiée à l'extension de la notion d'élément structurant à celle de voisinage structurant. Dans la section 5, nous proposons alors une nouvelle façon d'interpréter les modalités de nécessité et de possibilité à partir des nouveaux opérateurs d'érosions et de dilatations définis sur les voisinages structurants utilisés comme relation d'accessibilité. Cela généralise les premiers travaux établissant un lien entre la MM et la logique modale [11] mais aussi étend aux topos la sémantique des voisinages habituellement définie dans le cadre ensembliste [32]. Enfin, dans la section 6, nous montrons que la logique modale ainsi définie est bien adaptée pour définir des opérateurs concrets et efficaces pour la révision, la fusion, et l'abduction de nouvelles connaissances, ou encore le raisonnement spatial.

Cet article est une version courte et écrite en français de l'article [6]. Entre autres, le lecteur ne trouvera aucune preuve des résultats énoncés. Nous renvoyons les lecteurs intéressés à l'article original pour trouver les preuves de ces derniers.

2 Préliminaires : topos

Nous supposons que le lecteur connaît les notions de base de la théorie des catégories (catégorie, foncteur, transformation naturelle, limite, colimite, cartésienne close, sous-objets). Dans le cas contraire, nous renvoyons le lecteur intéressé aux livres [10, 29].

2.1 Notation

Dans la suite, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie générique, et X, Y, et Z des objets de $\mathcal{C}$. Quand $\mathcal{C}$ est cartésienne close, X^Y désigne l'objet exponentiel de X et Y. Les symboles f, g, et h définissent des morphismes, et étant donné un morphisme $f : X \to Y$, nous notons $\mathrm{dom}(f) = X$ et $\mathrm{cod}(f) = Y$. Les foncteurs sont désignés par les lettres F, G, et H, et les transformations naturelles par les lettres greques $\alpha, \beta : F \Rightarrow G$. Le morphisme identité est noté Id, et les objets initiaux et terminaux (quand ils existent) sont notés $\emptyset$ et $\mathbb{1}$. Enfin, les monomorphismes m entre deux objets X et Y sont notés $m : X \rightarrowtail Y$.

1. Notons que, plus généralement en MM, les érosions et les dilatations algébriques sur les treillis complets sont définies comme des opérations qui commutent avec les bornes inférieures et supérieures, respectivement (i.e. l'intersection et la réunion dans $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$). Cette forme plus générale de ces opérateurs ne fait alors plus référence à un élément structurant, et donc les deux premières propriétés sont plutôt des définitions dans ce cadre général.

2. Une catégorie est petite quand à la fois la collection des objets et celle des morphismes entre deux objets sont des ensembles.

2.2 Topos élémentaire

Un topos $\mathcal{C}$ est une catégorie cartésienne close finiment complète, et munie d'un classificateur de sous-objets Ω. Posséder un classificateur de sous-objets signifie qu'il existe un morphisme $true : \mathbb{1} \rightarrow \Omega$ tel que pour tout monomorphisme $m : Y \rightarrowtail X$ il existe un unique morphisme $\chi_m : X \rightarrow \Omega$ (morphisme caractéristique de m) tel que le diagramme suivant est un produit fibré (*pullback*) :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & \mathbb{1} \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Soit $X \in |\mathcal{C}|$ un objet de $\mathcal{C}$. Son ensemble de sous-objets est :

$$\text{Sub}(X) = \{[m] \mid \text{cod}(m) = X \text{ et } m \text{ est un monomorphisme}\}$$

où $[m]$ est la classe d'équivalence de m pour la relation d'équivalence $m \simeq m'$ ssi $\text{cod}(m) = \text{cod}(m')$ et $\text{dom}(m)$ et $\text{dom}(m')$ sont isomorphes.

Soit la relation d'ordre $\leq_X$ sur $\text{Sub}(X)$ définie par : pour tout $f : Y \rightarrowtail X$ et tout $g : Z \rightarrowtail X$

$$[f] \leq_X [g] \Longleftrightarrow \exists h : Y \rightarrowtail Z, f = g \circ h$$

Il est connu que $\text{Sub}(X)$ est une algèbre de Heyting [25], i.e. $(\text{Sub}(X), \leq_X)$ est un treillis borné et distributif avec $[Id_X]$ et $[\emptyset \rightarrowtail X]$ comme borne supérieure et borne inférieure, et qui possède une implication $\rightarrow$ adjointe à droite de $\wedge$ (quand l'algèbre de Heyting $(\text{Sub}(X), \leq_X)$ est vue comme une catégorie).

Comme $\mathcal{C}$ est finiment complète, nous avons le foncteur contravariant $\text{Sub} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow Pos; X \mapsto Sub(X); f : X \rightarrow Y \mapsto ([Y' \rightarrowtail X'] \mapsto [Y \rightarrowtail X])$ [3], tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

est un produit fibré.

Tout topos a les propriétés suivantes [9, 25] :

— Il a aussi toutes les colimites finies, et donc il a un objet intial $\emptyset$ et un objet terminal $\mathbb{1}$ qui sont, respectivement, la colimite et la limite du diagramme vide.

— Tout morphisme f se factorise de façon unique comme $m_f \circ e_f$ où e_f est un épimorphisme et m_f un monomorphisme (i.e. $(A \xrightarrow{f} B) = (A \xrightarrow{e_f} \text{Im}(f) \overset{m_f}{\rightarrowtail} B)$).

— Tout objet $X \in |\mathcal{C}|$ a un *objet puissance* Ω^X aussi noté PX. Comme objet puissance, il satisfait la propriété d'adjonction suivante :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, \Omega) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, PY)$$

Étant donné un morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, \Omega)$ (respectivement $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, PY)$) nous notons $f^\#$ son transposé par la bijection précédente. En particulier, le transposé de l'identité $Id_{PX} : PX \rightarrow PX$ est le morphisme caractéristique du sous-objet $\in_X \rightarrowtail X \times PX$ tel que pour tout $Y \in |\mathcal{C}|$ et tout morphisme $R \rightarrowtail X \times Y$, il existe un unique morphisme $R \rightarrow \in_X$ faisant du diagramme suivant un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & \in_X \arrow[d] \\ X \times Y \arrow[r, "Id_X \times \chi_R^\#"'] & X \times PX \end{tikzcd}$$

Par ses propriétés, les topos ont un comportement qui se rapproche de celui des ensembles, et qui permet ainsi d'internaliser une logique avec laquelle on peut raisonner (de façon constructive) comme si on manipulait des ensembles, des fonctions et des prédicats. Pour des raisons de place, nous ne présentons pas cette logique interne ici. Néanmoins, nous utiliserons grandement cette dernière dans cet article, entre autres pour définir les différentes notions d'érosions et de dilatations, et leur extension aux voisinage structurants. Cette logique interne est détaillée dans [6]. Pour une étude plus approfondie de cette dernière, nous renvoyons le lecteur au chapitre D du livre [25]. Elle permet en particulier de donner des définitions explicites des érosions et dilations (section 3), et de la morpho-logique (section 5).

3 Morphologie mathématique dans les topos

Soit $\mathcal{C}$ un topos. Les objets structurants se définissent simplement par tout morphisme de la forme $b : X \rightarrow PX$. À partir de ces objets structurants, il est assez simple de définir les opérations d'érosion et de dilatation.

Définissons par $\breve{b} : X \rightarrow PX$ le transposé du morphisme qui classifie l'image du morphisme $R_b \rightarrowtail X \times X \xrightarrow{\Delta_{X \times X}} (X \times X) \times (X \times X) \xrightarrow{p_2 \times p_1} X \times X$, où Δ est le morphisme diagonal, et p_i la projection sur le $i$ème argument. Dans le langage interne, cela s'écrit : $\breve{b}(y) = \{x : X \mid y \in_X b(x)\}$.

Definition 3.1 (Erosion) *Soit $b : X \rightarrow PX$ un objet structurant. L'**érosion par** b est le morphisme $\varepsilon[b] : PX \rightarrow PX$ dont le transposé classifie le morphisme $r : R \rightarrowtail PX \times X$ (i.e. $\varepsilon[b] = \chi_r^\#$) où R est le produit fibré du diagramme :*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & \geq_X \arrow[d] \\ PX \times X \arrow[r, "Id \times b"'] & PX \times PX \end{tikzcd}$$

3. Pos est la catégorie des ensembles partiellement ordonnés (*posets*).

Dans la logique interne du topos C, cela s'exprime de façon équivalente par :

$$\varepsilon[b](Y) = \{x : X \mid b(x) \leq_X Y\}$$

Definition 3.2 (Dilation) *Soit $b : X \to PX$ un objet structurant. La* **dilatation par** *b est le morphisme $\delta[b] : PX \to PX$ qui classifie l'image de $R \rightarrowtail X \times X \times PX \to PX \times X$ où R est le produit fibré du diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr] \arrow[d] & & R_{\breve{b}} \times \in_X \arrow[d] \\
X \times X \times PX \arrow[rr, "Id \times \Delta_X \times Id"'] & & X \times X \times X \times PX
\end{tikzcd}$$

Dans la logique interne, cela s'écrit :

$$\delta[b](Y) = \{x : X \mid \exists y.\ y \in_X \breve{b}(x) \ \wedge \ y \in_X Y\}$$

Nous retrouvons l'ensemble des résultats classiques de la MM.

Proposition 3.3 *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- Adjunction. $\forall Y.\ \forall Z.\ \delta[b](Y) \leq_X Z \iff Y \leq_X \varepsilon[b](Z)$.
- Monotonie. *Les érosions et les dilatations sont monotones pour $\leq_X$.*
- Préservation.
  - $\varepsilon[b](X) = X$,
  - $\delta[b](\emptyset) = \emptyset$.
- Extensivité. *$\varepsilon[b]$ et $\delta[b]$ sont, respectivement, anti-extensive et extensive pour $\leq_X$ ssi la formule $\forall x.\ x \in_X b(x)$ est valide dans la logique interne.*

4 Voisinage structurant : topologie interne

Donner une sémantique morphologique aux modalités avec des aspects topologiques a montré son importance dans la représentation des connaissances et les raisonnements associés (comme le raisonnement spatial). Dans [23], les objets structurants ont été étendus aux voisinages structurants, concept similaire à la notion topologique, dans le cadre ensembliste. Nous proposons ici de l'étendre à la théorie des topos.

4.1 Voisinage structurant

Soit $X \in |C|$ un objet.

Definition 4.1 (Filtre) *Un* ***filtre*** *sur X est tout sous-objet de PPX satisfaisant les axiomes suivants : soit $F : PPX$ une variable*

- *Fermeture par intersection finie :*

$$\forall A.\ \forall B.\ A \in_{PX} F \ \wedge \ B \in_{PX} F \ \Rightarrow \ A \wedge B \in_{PX} F$$

- *Fermeture par sur-ensemble :*

$$\forall A.\ \forall B.\ A \in_{PX} F \ \wedge \ A \leq_X B \ \Rightarrow \ B \in_{PX} F$$

- *Non vide :*

$$X \in_X F$$

- *Stricte :*

$$\forall A.\ A \in_{PX} F \ \Rightarrow \ (\exists x.\ x \in_X A)$$

Cela définit un morphisme $\mathcal{F} : PPX \to \Omega$.

Definition 4.2 (Voisinage structurant) *Un* **voisinage structurant** *est un morphisme $N : X \to PPX$ qui valide les formules suivantes :*

1. $\forall x.\ \mathcal{F}(N(x))$,
2. $\forall x. \forall A. A \in_{PX} N(x) \Rightarrow x \in_X A$

Definition 4.3 (Érosion et dilatation) *Soit $N : X \to PPX$ un voisinage structurant. Définissons le morphisme $\varepsilon[N] : PX \to PX$ par la formule :*

$$\varepsilon[N](Y) = \{x : X \mid Y \in_{PX} N(x)\}$$

et le morphisme $\delta[N] : PX \to PX$ par :

$$\begin{aligned}
\delta[N](Y) &= \{x : X \mid \exists F.\ \mathcal{F}(F) \ \wedge \ Y \in_{PX} F \ \wedge \ N(x) \leq_{PX} F\} \\
&= \{x : X \mid \forall A.\ A \in_{PX} N(x) \ \Rightarrow \ \exists y.\ y \in_X A \wedge Y\}
\end{aligned}$$

Étant donné un voisinage structurant $N : X \to PPX$, nous avons la transformation naturelle $\overline{\varepsilon[N]} : \mathrm{Sub} \Rightarrow \mathrm{Sub}$ définie par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Hom(\mathbb{1}, PX) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "Hom(Id_{\mathbb{1}}, \varepsilon[b])"'] & \mathrm{Sub}(X) \arrow[d, "\overline{\varepsilon[N]}_X"] \\
Hom(\mathbb{1}, PX) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Sub}(X)
\end{tikzcd}$$

De façon similaire, nous pouvons construire la transformation naturelle $\overline{\delta[N]} : \mathrm{Sub} \Rightarrow \mathrm{Sub}$.

Proposition 4.4 *$\varepsilon[N]$ et $\delta[N]$ sont monotones. De plus :*

- *$\varepsilon[N]$ satisfait :*
  - $\forall A.\ \forall B.\ \varepsilon[N](A \wedge B) = \varepsilon[N](A) \wedge \varepsilon[N](B)$.
  - $\varepsilon[N](X) = X$.
  - $\forall Y. \varepsilon[N](Y) \leq_X Y$.
- *$\delta[N]$ satisfait :*
  - $\forall A.\ \forall B.\ \delta[N](A \vee B) \geq_X \delta[N](A) \vee \delta[N](B)$.
  - $\delta[N](\emptyset) = \emptyset$.
  - $\forall Y. Y \leq_X \delta[N](Y)$.
- $\forall Y.\ \varepsilon[N](\neg_X Y) \leq_X \neg_X \delta[N](Y)$

Bien que $\varepsilon[N]$ soit une ouverture au sens toplogique du terme, $\delta[N]$ n'est pas une fermeture (elle n'est pas idempotente) ni une dilatation au sens strict (elle ne se distribue pas complètement sur $\vee$). Les voisinages structurants seront suffisants pour donner une sémantique à la logique modale intuitioniste IT. Dans la section suivante, nous étendrons ces derniers aux voisinages topologiques pour permettre d'interpréter la logique modale constructive CS4.

Chaque objet structurant $b : X \to PX$ définit un voisinage structurant $N_b : X \to PPX : N_b(x) = \{Y : PX \mid U \geq_X b(x)\}$. Il n'est pas difficile de montrer que $\varepsilon[N_b] = \varepsilon[b]$ et $\delta[N_b] = \delta[\breve{b}]$.

4.2 Voisinage topologique

Definition 4.5 (Voisinage topologique) *Un* **voisinage topologique** *est un voisinage structurant $N : X \to PPX$ satisfaisant :*

$$\forall x.\ \forall A.\ A \in_{PX} N(x) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \exists B.\ B \in_{PX} N(x) \wedge \\ (\forall y.\ y \in_X B \Rightarrow A \in_{PX} N(y)) \end{array} \right.$$

Proposition 4.6 *Pour les voisinages topologiques N, $\varepsilon[N]$ est un opérateur intérieur interne sur PX (i.e. il est anti-extensif, préserve X, se distribue sur $\wedge$, et est idempotent). À l'inverse, $\delta[N]$ n'est qu'un opérateur de clôture interne sur PX (i.e. il est extensif, préserve l'objet initial, et est idempotent).*

5 Morpho-logique : interprétation des modalités dans les topos

Dans la section 4.1, nous avons montré que le tuple $(PX, \wedge, \vee, \neg_X, \emptyset, \varepsilon[N], \delta[N])$ est une agèbre modale interne pour un voisinage structurant N. Nous utilisons ce fait pour donner une sémantique par voisinage aux logiques modales constructives IT (voisinage structurant) et CS4 (voisinage topologique).

Syntaxe. Soit PV un ensemble dénombrable de **variables propositionelles** $p, q \ldots$. L'ensemble Φ des formules est défini par la grammaire :

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

où $p \in PV$.

Sémantique. Soit C un topos. Étant donné un ensemble de variables propositionnelles PV, un PV**-modèle** $\mathcal{M}$ est un triplet (X, N, ν) où :

— $X \in |C|$,
— $N : X \to PPX$ est un voisingae structurant,
— $\nu : PV \to \mathrm{Sub}(X)$ est une **évaluation**.

Pour donner une sémantique à la logique CS4, nous restreignons les modèles aux voisinages topologiques.
Notons Mod la classe des PV-modèles.

Comme il est d'usage en logique catégorielle, la sémantique des formules est définie par des sous-objets. Ainsi, étant donné un modèle $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$, il donne lieu à une application $[[\mathcal{M}]](\_) : \Phi \to \mathrm{Sub}(X)$ définie par induction structurelle sur les formules comme suit :

— $[[\mathcal{M}]](\top) = [Id_X]$,
— $[[\mathcal{M}]](\bot) = [\emptyset \rightarrowtail X]$
— $[[\mathcal{M}]](p) = \nu(p)$,
— $[[\mathcal{M}]](\neg\varphi) = [[\mathcal{M}]](\varphi) \to [[\mathcal{M}]](\bot)$
— $[[\mathcal{M}]](\varphi \wedge \psi) = [[\mathcal{M}]](\varphi) \wedge [[\mathcal{M}]](\psi)$ (borne inférieure),
— $[[\mathcal{M}]](\varphi \vee \psi) = [[\mathcal{M}]](\varphi) \vee [[\mathcal{M}]](\psi)$ (borne supérieure),
— $[[\mathcal{M}]](\varphi \Rightarrow \psi) = [[\mathcal{M}]](\varphi) \to [[\mathcal{M}]](\psi)$
— $[[\mathcal{M}]](\Box\varphi) = \underline{\varepsilon[N]}_X([[\mathcal{M}]](\varphi))$
— $[[\mathcal{M}]](\Diamond\varphi) = \overline{\delta[N]}_X([[\mathcal{M}]](\varphi))$

Nous écrivons $\mathcal{M} \models \varphi$ si $[[\mathcal{M}]](\varphi) = [Id_X]$, et donc pour tout $\iota \in \mathrm{Sub}(X)$, nous écrivons $\mathcal{M} \models_\iota \varphi$ pour signifier que $\iota \leq_X [[\mathcal{M}]](\varphi)$. Notons $Mod(\varphi)$ la classe des modèles $\mathcal{M}$ qui valident φ. Enfin, étant donné un ensemble de formules Γ et une formule φ, nous écrivons $\Gamma \models \varphi$ pour dire que pour tout modèle $\mathcal{M}$ qui satisfait $\mathcal{M} \models \psi$ pour toute formule $\psi \in \Gamma$, nous avons $\mathcal{M} \models \varphi$.

Système d'inférence. Comme il est d'usage pour les logiques catégorielles, le système d'inférence est défini comme un système de séquents où un séquent est une expression de la forme $\varphi \vdash \psi$ avec $\varphi, \psi \in \Phi$. Étant donné un modèle $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$, on dit que $\mathcal{M}$ valide $\varphi \vdash \psi$, noté $\varphi \models_{\mathcal{M}} \psi$, si $[[\mathcal{M}]](\varphi) \leq_X [[\mathcal{M}]](\psi)$, et ce séquent est valide, noté $\varphi \models \psi$, s'il est valide pour tous les modèles. Nous avons alors les règles suivantes [4] (où $\varphi \dashv\vdash \psi$ signifie que à la fois $\varphi \vdash \psi$ et $\psi \vdash \varphi$) :

— *Identité :*

$$\varphi \vdash \varphi$$

— *Axiomes :*
  — **Préservation.** $\Box\top \dashv\vdash \top$, et $\Diamond\bot \dashv\vdash \bot$
  — **Dualité.** $\Box\neg\varphi \vdash \neg\Diamond\varphi$
  — **Distributivité.** $\Box(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \Box\varphi \wedge \Box\psi$ et $\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi \vdash \Diamond(\varphi \vee \psi)$
  — **Axiome K.** $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$
  — **Axiome T.** $\Box\varphi \vdash \varphi$, et $\varphi \vdash \Diamond\varphi$
  — **Axiome S4.** $\Box\varphi \vdash \Box\Box\varphi$, et $\Diamond\Diamond\varphi \vdash \Diamond\varphi$ (valide pour les modèles restreints aux voisinages topologiques)
  — **Classique.** $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ (quand C est un topos booléen)

— *Inconsistance :* $\bot \vdash \psi$
— *Tautologie :* $\varphi \vdash \top$
— *Coupure :*

$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \psi \vdash \chi}{\varphi \vdash \chi}$$

4. Comme il est d'usage, une règle se présentera sous la forme $\frac{\Gamma}{\sigma}$ et signifiera que le séquent σ peut être inféré de l'ensemble de séquents Γ. Toute règle avec une double ligne signifiera que chacun des séquents peut être inféré des autres.

— *Conjonction :* $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \quad \varphi \wedge \psi \vdash \psi \quad \varphi \wedge \varphi \dashv\vdash \varphi \quad \varphi \wedge \psi \dashv\vdash \psi \wedge \varphi$

$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \varphi \vdash \chi}{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}$$

— *Disjonction :* $\varphi \vdash \varphi \vee \psi \quad \psi \vdash \varphi \vee \psi \quad \varphi \vee \psi \dashv\vdash \psi \vee \varphi$

$$\frac{\varphi \vdash \chi \qquad \psi \vdash \chi}{\overline{\varphi \vee \psi \vdash \chi}}$$

— *Distributivité :* $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \dashv\vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

— *Implication :*

$$\frac{\varphi \wedge \psi \vdash \chi}{\overline{\varphi \vdash \psi \Rightarrow \chi}}$$

— *Négation :* $\neg\varphi \dashv\vdash \varphi \Rightarrow \bot$

— *Modalités :*

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\Box\varphi \vdash \Box\psi}$$

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\Diamond\varphi \vdash \Diamond\psi}$$

Dans [6], nous avons montré que ce système est correct et complet. Pour montrer la complétude, nous avons utilisé une méthode proche de la méthode de Henkin. Cela nous a assuré un résultat de complétude indépendant d'un topos donné.

6 Application à l'IA symbolique

Que ce soit en logique mathématique, en philosophie ou en intelligence artificielle, on est souvent confronté à faire évoluer nos croyances ou connaissances à la lumière de nouvelles observations (révision de croyances), à savoir comment extraire une information cohérente de plusieurs sources éventuellement contradictoires (fusion), ou encore comment une observation donnée peut s'expliquer à partir de connaissances acquises (abduction).

Il a été montré dans le cadre de la logique propositionnelle que l'application d'opérateurs issus de la MM se montrait efficace pour répondre à ce type de questions [16]. Profitant du fait que nos opérateurs modaux sont définis à partir d'extensions des opérateurs de base de la MM que sont les érosions et les dilatations, nous proposons d'étendre ces travaux au cadre de la morpho-logique définie dans cet article. La figure 1 illustre, dans le cas simple où les modèles des formules sont des ensembles, le principe de l'approche proposée.

6.1 Révision

Nous supposons donc ici que les croyances des agents sont formalisées par des formules de notre morpho-logique. La révision de croyances a alors pour objectif de définir un opérateur $\circ$ entre deux formules φ et ψ qui définira comment transformer de façon minimale φ en une formule φ' telle que $\varphi' \wedge \psi$ soit cohérente [5]. Une axiomatisation de la révision s'est imposée dans le domaine, la théorie AGM [7], dont nous rappelons ici les axiomes :

— $(G1)$ Si ψ est une formule cohérente, alors $\varphi \circ \psi$ l'est aussi ;

— $(G2)$ $Mod(\varphi \circ \psi) \subseteq Mod(\psi)$;

— $(G3)$ Si $\varphi \wedge \psi$ est cohérente, alors $\varphi \circ \psi = \varphi \wedge \psi$;

— $(G4)$ Si $\varphi \equiv \varphi'$ et $\psi \equiv \psi'$, alors $Mod(\varphi \circ \psi) = Mod(\varphi' \circ \psi')$ ($\equiv$ signifie logiquement équivalent) ;

— $(G4')$ Si $\psi \equiv \psi'$, alors $Mod(\varphi \circ \psi) = Mod(\varphi \circ \psi')$;

— $(G5)$ $Mod((\varphi \circ \psi) \wedge \chi) = Mod(\varphi \circ (\psi \wedge \chi))$ si $(\varphi \circ \psi) \wedge \chi$ est une formule cohérente.

L'axiome $(G4)$ exprime une complète indépendance de l'opérateur de révision par rapport à la syntaxe. Or, nous verrons dans la suite que, lorsque l'opérateur $\circ$ applique une transformation syntaxique sur la base de connaissances (ici représentée par la formule φ), cet axiome ne peut plus être assuré. Ce sera le cas pour notre opérateur de révision dédié à la logique CS4 (voir ci-dessous), d'où l'introduction de l'axiome $(G4')$.

Opérateur de révision fondé sur la dilatation. Par la façon dont les modalités sont interprétées, nous avons, pour toute formule $\varphi \in \Phi$, $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\Diamond\varphi)$ (les dilatations sont extensives ici).

Suivant l'approche développée dans [12], l'idée consiste alors à dilater la classe des modèles de φ jusqu'à rencontrer la classe des modèles de ψ. Nous obtenons alors l'opérateur de révision $\circ$ suivant :

$$\varphi \circ \psi = \Diamond^n \varphi \wedge \psi$$

où $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \Diamond^k \varphi \wedge \psi \text{ est cohérente}\}$ et $\Diamond^n\varphi = \underbrace{\Diamond \ldots \Diamond}_{n\ fois} \varphi$.

Proposition 6.1 *L'opérateur $\circ$ satisfait les axiomes $(G1)$ – $(G5)$.*

L'approche ci-dessus n'est plus applicable si nous restreignons nos modèles aux voisinages topologiques. En effet, dans ce cas-là, le séquent $\Diamond\Diamond\varphi \dashv\vdash \Diamond\varphi$ est valide. Une autre façon de faire pour définir l'opérateur de révision $\circ$ est alors de changer les modalités de nécessité en possibilité. Il semble assez intuitif que si la formule n'est pas cohérente pour tous les états, elle peut l'être pour certains. Une approche similaire a été adoptée dans [2] pour définir les opérateurs de révision pour les logiques modales et du 1er ordre dans le cadre ensembliste. La définition de ces opérateurs profitait alors du raisonnement booléen qui assure l'existence de formules en forme normale sur lesquelles étaient définies les opérateurs de révison. Dans un cadre

5. φ sera souvent la conjonction d'un ensemble fini de croyances elles-mêmes définies par des formules [26].

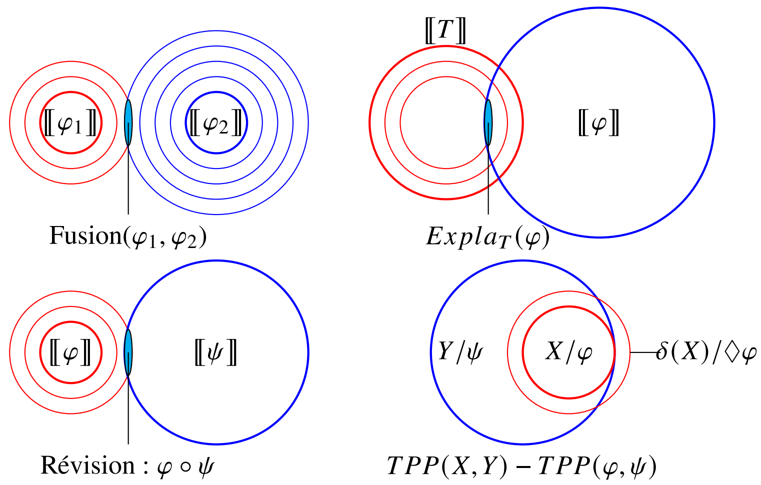

FIGURE 1 – Illustration du principe proposé : fusion, révision, abduction, relation TPP. Les modèles des formules sont représentés par des ensembles. La fusion de φ_1 et φ_2 résulte de dilatations successives de l'ensemble des modèles de chacune des formules, jusqu'à ce qu'elles soient cohérentes. La révision de φ par ψ est obtenue en dilatant l'ensemble des modèles de φ jusqu'à rencontrer ceux de ψ, et ce sont donc les modèles de ψ les plus proches de ceux de φ qui sont retenus. Pour les explications, il s'agit au contraire de réduire l'ensemble des modèles de T, par des rétractions, tout en préservant la cohérence avec φ. Les explications sont alors les modèles de φ qui sont aussi les plus centraux possibles de la théorie. La relation TPP, une des relations de la théorie RCC-8, entre φ et ψ (expressions logiques d'entités spatiales) peut-être exprimée par l'inclusion de X (représentant les modèles de φ) dans Y (modèles de ψ) mais pas celle de la dilatation de X dans Y (dès que l'on dilate un peu X, on rencontre le complémentaire de Y). Les propositions de cet article permettent de généraliser ces opérations dans le cadre des topos.

intuitioniste, une telle forme normale pour les formules n'existe pas, et donc, quand le topos C n'est pas booléen, nous proposons la définition suivante. Tout d'abord, définissons deux applications $\rho, \kappa : \Phi \longrightarrow \Phi$ sur les formules (ces dernières seront aussi utiles pour traiter l'abduction) :

- $\rho(\top) = \top$ et $\kappa(\top) = \top$
- $\rho(\bot) = \bot$ et $\kappa(\bot) = \bot$
- $\rho(p) = p$ et $\kappa(p) = p$ pour $p \in PV$.
- $\rho(\varphi \Rightarrow \psi) = (\kappa(\varphi) \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \rho(\psi))$ et $\kappa(\varphi \Rightarrow \psi) = (\varphi \Rightarrow \kappa(\psi)) \vee (\rho(\varphi) \Rightarrow \psi)$
- $\rho(\varphi \mathbin{@} \psi) = (\rho(\varphi) \mathbin{@} \psi) \vee (\varphi \mathbin{@} \rho(\psi))$ et $\kappa(\varphi \mathbin{@} \psi) = (\kappa(\varphi) \mathbin{@} \psi) \vee (\varphi \mathbin{@} \kappa(\psi))$ avec $@ \in \{\wedge, \vee\}$
- $\rho(\neg\varphi) = \neg\kappa(\varphi)$ et $\kappa(\neg\varphi) = \neg\rho(\varphi)$
- $\rho(\Box\varphi) = \Diamond\varphi$ et $\kappa(\Box\varphi) = \Box\kappa(\varphi)$
- $\rho(\Diamond\varphi) = \Diamond\rho(\varphi)$ et $\kappa(\Diamond\varphi) = \Box\varphi$

Proposition 6.2 *Pour toute formule φ et tout modèle $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$, nous avons $[[M]](\varphi) \leq_X [[M]](\rho(\varphi))$ et $[[M]](\kappa(\varphi)) \leq_X [[M]](\varphi)$.*

Définissons alors l'application $\tau : \Phi \longrightarrow \Phi$ qui sera à la base de notre nouvel opérateur de révision. Soit χ une tautologie.

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \Phi & \longrightarrow & \Phi \\ \varphi & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \chi & \text{si } \rho(\varphi) = \varphi \\ \rho(\varphi) & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1}$$

Proposition 6.3 *L'application τ satisfait pour toute formule cohérente $\varphi \in \Phi$:*

- **Extensivité.** *Pour toute formule φ, nous avons : $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\tau(\varphi))$.*
- **Exhaustivité.** *Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $Mod(\tau^k(\varphi)) = Mod$.*

Dans [2], les applications satisfaisant de telles conditions sont appelées des relaxations.

Nous obtenons alors l'opérateur de révision $\circ$:

$$\varphi \circ \psi = \tau^n(\varphi) \wedge \psi$$

où $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \tau^k(\varphi) \wedge \psi \text{ est cohérente}\}$ et $\tau^n(\varphi) = \underbrace{\tau(\ldots\tau}_{n\ fois}(\varphi)\ldots)$.

Proposition 6.4 *L'opérateur $\circ$ satisfait les axiomes $(G1)$ – $(G3)$, $(G4')$, et $(G5)$.*

En s'appuyant sur des résultats généraux établis dans [2], nous montrons aussi dans [6] que nos opérateurs de révision induisent des transformations minimales au sens du théorème de représentation de [26]. Comme illustré sur la figure 1, les dilatations successives induisent un ordre sur les modèles, et les modèles minimaux de ψ au sens de cet ordre sont retenus (les plus proches de φ).

6.2 Fusion

Quand les croyances jouent des rôles symétriques, un autre problème largement abordé est celui de la fusion de croyances. Soient m formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ définissant des croyances d'agents. Comme pour la révison, leur fusion peut se définir simplement à partir d'une succession de dilatations. Dans notre cadre, cela s'écrit :

$$Fusion(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \tau^n(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge \tau^n(\varphi_m)$$

où $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \bigwedge_{i=1}^m \tau^k(\varphi_i) \text{ est cohérente}\}$, et τ est défini par l'équation 1. Il a été montré dans [16, 17] que les fusions de cette forme sont équivalentes aux opérateurs de fusion définis à partir de fonctions d'agrégation et de distances spécifiques, et satisfont l'ensemble des postultats de rationalité introduits dans [27].

6.3 Abduction

L'abduction est le procédé qui consiste, étant données une théorie T et une observation φ, à trouver la meilleure explication ψ telle que $T \cup \{\psi\} \models \varphi$. Les explications possibles de φ selon T sont multiples (voir en nombre infini). Dans une approche logique, suivant nos précédents travaux [3] où nous avons étudié l'abduction indépendamment d'une logique donnée, nous étudions aussi ici l'abduction comme un procédé d'inférence. Intuitivement, trouver une explication à φ selon T consiste à couper dans la classe des modèles de T tout en restant cohérent avec φ. Ainsi, l'abduction peut être vue comme une l'érosion, et donc ce procédé consistera à éroder $Mod(T)$ autant que possible tout en conservant des proriétés de minimalité. Nous proposons alors d'instancier l'approche développée dans [3] à notre cadre [6]. Nous définissons l'application $\zeta : \Phi \to \Phi$, χ étant une antilogie, par :

$$\zeta : \left\{ \begin{array}{lll} \Phi & \to & \Phi \\ \varphi & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \chi & \text{si } \kappa(\varphi) = \varphi \\ \kappa(\varphi) & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où κ est l'application précédemment définie dans la section 6.1.

Proposition 6.5 *L'application ζ satisfait pour toute formule cohérente $\varphi \in \Phi$:*

— **Anti-extensivité.** $Mod(\zeta(\varphi)) \subseteq Mod(\varphi)$.

— **Vacuum.** *Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $Mod(\zeta^k(\varphi)) = \emptyset$.*

6. Dans [3], l'approche a déjà été appliquée à la logique modale mais dans le cadre ensembliste. Ici, comme précédemment, nous devons adapter l'instanciation au raisonnement intuitioniste.

Dans [3], de telles applications sont appelées des rétractions.

Suivant [3], à partir de ζ nous définissons deux familles de classes de modèles C_{lcr} et C_{lnr} de la façon suivante [7], T étant un ensemble fini de formules et φ une formule tels que $T \cup \{\varphi\}$ est cohérent :

$$C^{\varphi}_{lcr} = \{Mod(\zeta^k(\bigwedge T) \wedge \varphi) \mid k \in \mathbb{N}, Mod(\zeta^k(\bigwedge T) \wedge \varphi) \neq \emptyset\}$$

$$C^{\varphi}_{lnr} = \{Mod(\zeta^k(\bigwedge T \wedge \varphi)) \mid k \in \mathbb{N}, Mod(\zeta^k(\bigwedge T \wedge \varphi)) \neq \emptyset\}$$

où $\bigwedge T = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ si $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Nous pouvons montrer assez simplement que C^{φ}_{lcr} et C^{φ}_{lnr} sont fermés par inclusion, et sont des ensembles bien fondés. Dans [3], de telles sous-familles de modèles s'appellent des coupures.

Ces deux coupures permettent de définir les deux relations d'explicabilité suivantes :

$$\varphi \rhd_{C_{lcr}} \psi \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Mod(T \cup \{\psi\}) \neq \emptyset, \text{ et} \\ Mod(T \cup \{\psi\}) \subseteq Mod(\zeta^n(T) \cup \{\varphi\}) \end{array} \right.$$

où $n = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid Mod(\zeta^k(T) \cup \{\varphi\}) \neq \emptyset\}$;

$$\varphi \rhd_{C_{lnr}} \psi \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Mod(T \cup \{\psi\}) \neq \emptyset, \text{ et} \\ Mod(T \cup \{\psi\}) \subseteq Mod(\zeta^m(T \cup \{\varphi\})) \end{array} \right.$$

où $m = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid Mod(\zeta^k(T \cup \{\varphi\})) \neq \emptyset\}$.

À partir directement des théorèmes 2, 3 et 4 dans [3], nous obtenons que ces relations satisfont tout ou partie des postulats de rationalité définis dans [33] que l'on résume dans la table 1. Rappelons ces postualts de rationalité (plus de détails peuvent être touvés dans [3]) :

LLE :	si $\vdash_T \alpha \leftrightarrow \alpha'$ et $\alpha \rhd \gamma$ alors $\alpha' \rhd \gamma$.
RLE :	si $\vdash_T \gamma \leftrightarrow \gamma'$ et $\alpha \rhd \gamma$ alors $\alpha \rhd \gamma'$.
E-CM :	si $\alpha \rhd \gamma$ et $\gamma \vdash_T \beta$ alors $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$.
E-C-Cut :	si $\forall \delta\ [\alpha \rhd \delta \Rightarrow \delta \vdash_T \beta\ ]$ et $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ alors $\alpha \rhd \gamma$.
RS :	si $\alpha \rhd \gamma$, $\gamma' \vdash_T \gamma$ et $\gamma' \nvdash_T \bot$ alors $\alpha \rhd \gamma'$.
ROR :	si $\alpha \rhd \gamma$ et $\alpha \rhd \delta$ alors $\alpha \rhd (\gamma \vee \delta)$.
E-Reflexivity :	si $\alpha \rhd \gamma$ alors $\gamma \rhd \gamma$.
E-Con :	$\nvdash_T \neg\alpha$ ssi il existe γ tel que $\alpha \rhd \gamma$.

6.4 Raisonnement spatial

Les approches topologiques appliquées au raisonnement spatial qualitatif décrivent des relations entre régions spatiales. Ici, nous proposons d'appliquer notre morphologique au domaine de la méréotopologie, plus spécifiquement le modèle RCC-8 [34]. Cette théorie permet de définir plusieurs relations topologiques à partir d'un prédicat de base C de connectivité. C'est pourquoi dans la littérature, RCC-8 a reçu une axiomatisation dans la logique du premier ordre. Rappelons les huit relations de RCC-8 :

7. lcr pour *last consistent retraction* et lnr pour *last non-trivial retraction*

Postulats de rationalité	$\rhd_{C_{lcr}}$	$\rhd_{C_{lnr}}$
LLE et RLE	√	√
RS	√	√
E-Con	√	√
ROR	√	√
E-Reflexivity	√	√
E-CM	√	
E-C-Cut	√	

TABLE 1 – Liens entre les postulats de rationalité de [33] et les propriétés satisfaites par $\rhd_{C_{lcr}}$ et $\rhd_{C_{lnr}}$.

— **Déconnexion** DC**.** $DC(X,Y)$ signifie que la région X est déconnectée de la région Y ;
— **Connexion externe** EC**.** $EC(X,Y)$ signifie que X est connectée de façon externe à Y ;
— **Chevauchement partiel** PO**.** $PO(X,Y)$ signifie que X et Y ont une intersection commune qui ne recouvre pas X ni Y ;
— **Partie propre tangentielle (resp. inverse)** TPP **(resp.** TPP_i**).** $TPP(X,Y)$ (resp. $TPP_i(X,Y)$) signifie que X (resp. Y) est une partie tangentielle propre de Y (resp. de X) ;
— **Partie propre non-tangentielle (resp. inverse)** $NTPP$ **(resp.** $NTPP_i$**).** $NTPP(X,Y)$ (resp. $NTPP_i(X,Y)$) signifie que X (resp. Y) est une partie non-tangentielle de Y (resp. de X) ;
— **Égalité** EQ**.** $EQ(X,Y)$ signifie que X et Y sont des régions identiques.

Comme il a été montré dans [4, 11, 12], la morpho-logique telle que définie dans cet article permet une axiomatisation plus simple de certaines de ces relations.

Soit $\mathcal{M} = (X, N, \nu)$ un modèle. Les sous-objets de X sont des entités spatiales (i.e. des régions), et les formules sont des combinaisons de telles entités. De là, on a la formalisation suivante des relations RCC-8 :
— $C(X,Y) : \varphi \wedge \psi$;
— $DC(X,Y) : \neg(\varphi \wedge \psi)$;
— $EC(X,Y) : \neg(\varphi \wedge \psi)$ et $\Diamond\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \wedge \Diamond\psi$;
— $PO(X,Y) : \varphi \wedge \psi$ et $\varphi \wedge \neg\psi$ et $\neg\varphi \wedge \psi$;
— $TPP(X,Y) : \varphi \Rightarrow \psi$ et $\Diamond\varphi \wedge \neg\psi$;
— $NTPP(X,Y) : \varphi \Rightarrow \psi$ et $\varphi \Rightarrow \Box\psi$;
— $EQ(X,Y) : \varphi \Leftrightarrow \psi$.

où φ et ψ sont des formules qui définissent respectivement les régions X et Y. Ainsi, les formules suivantes traduisent :
— Pour EC. Les deux régions X et Y ne s'intersectent pas mais dès que l'une des deux est dilatée (par l'opérateur $\Diamond$) alors l'intersection devient non vide.
— Pour TPP. X est inclus dans Y mais la dilatation de X (représentée par $\Diamond\varphi$) ne l'est plus.
— Pour $NTPP$. X est inclus dans Y et le reste même si l'on érode la région Y.

Les autres relations sont naturelles dans leur traduction.

7 Conclusion

Les contributions de cet article sont les suivantes :
— extension de la MM aux voisinages structurants, et ce dans le cadre de la théorie des topos élémentaires ;
— sémantique toposique par voisinage aux logiques modales constructives IT et CS4 ;
— défintion d'un calcul correct et complet ;
— définition d'opérateurs de révision, de fusion et d'abduction dédiés à la logique modale toposique, la morpho-logique ;
— application de la morpho-logique au domaine de la méréotopologie, plus spécifiquement le modèle RCC-8.

Plusieurs perspectives s'offrent à nous. Par la bijection $Hom(X, PY) \simeq \mathrm{Sub}(X \times Y)$, les objets et les voisinages structurants peuvent se voir comme des applications qui associent à chaque élément x les éléments en relation avec lui. Une généralisation de cela peut être obtenue au travers de la notion de co-algèbre principalement étudiée dans le cadre ensembliste. Dans ce cadre, la notion de *predicate lifting* a émergé comme concept sous-jacent à la sémantique des opérateurs modaux. Il serait alors intéressant de généraliser cette notion à notre cadre toposique, comme nous avons commencé à le faire dans [5].

Une autre extension serait aussi de voir comment étendre la morpho-logique au cadre flou. En effet, il est habituel d'introduire de l'incertitude dans le raisonnement.

Références

[1] Aiello, M. et B. Ottens: *The Mathematical morphological view on reasoning about space*. Dans *International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'07)*, pages 205–211, 2007.

[2] Aiguier, M., J. Atif, I. Bloch et C. Hudelot: *Belief Revision, Minimal Change and Relaxation : A General Framework based on Satisfaction Systems, and Applications to Description Logics*. Artificial Intelligence, 256 :160–180, 2018.

[3] Aiguier, M., J. Atif, I. Bloch et R. Pino Pérez: *Explanatory relations in arbitrary logics based on satisfaction systems, cutting and retraction*. International Journal of Approximate Reasoning, 102 :1–20, 2018.

[4] Aiguier, M. et I. Bloch: *Logical Dual Concepts based on Mathematical Morphology in Stratified Institutions : Applications to Spatial Reasoning*. Journal of Applied Non-Classical Logics, 29(4) :392–429, 2019.

[5] Aiguier, M. et I. Bloch: *Abstract Categorical Logic*. Logica Universalis, 2022.

[6] Aiguier, M., I. Bloch, S. Nibouche et R. Pino-Pérez: *Morpho-logic from a topos perspective : Application to symbolic AI*. Rapport technique arXiv 2303.04895, arXiv cs.AI, 2023.

[7] Alchourron, C., P. Gardenfors et D. Makinson: *On the logic of theory change*. Journal of Symbolic Logic, 50(2) :510–530, 1985.

[8] Alechina, N., M. Mendler, V. de Paiva et E. Ritter: *Categorical and Kripke Semantics for Constructive S4 Modal Logic*. Dans *15th International Workshop on Computer Science Logic*, tome LNCS 2142. Springer-Verlag, 2003.

[9] Barr, M. et C. Wells: *Toposes, triples and theories*. Springer-Verlag, 1985.

[10] Barr, M. et C. Wells: *Category Theory for Computing Science*. Prentice-Hall, 1990.

[11] Bloch, I.: *Modal logics based on mathematical morphology for qualitative spatial reasoning*. Journal of Applied Non-Classical Logics, 12(3-4) :399–423, 2002.

[12] Bloch, I., S. Blusseau, R. Pino Pérez, E. Puybareau et G. Tochon: *On Some Associations Between Mathematical Morphology and Artificial Intelligence*. Dans *International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology*, tome LNCS 12708, pages 457–469. Springer-Verlag, 2021.

[13] Bloch, I. et A. Bretto: *Mathematical morphology on hypergraphs, application to similarity and positive kernel*. Computer Vision and Image Understanding, 117 :342–354, 2013.

[14] Bloch, I., A. Bretto et A. Leborgne: *Robust Similarity between Hypergraphs based on Valuations and Mathematical Morphology Operators*. Discrete Applied Mathematics, 183 :2–19, 2015.

[15] Bloch, I. et J. Lang: *Towards Mathematical Morpho-Logics*. Dans Bouchon-Meunier, B., J. Gutierrez-Rios, L. Magdalena et R. Yager (rédacteurs) : *Technologies for Constructing Intelligent Systems*, pages 367–380. Springer-Verlag, 2002.

[16] Bloch, I., J. Lang, R. Pino Pérez et C. Uzcátegui: *Morphologic for knowledge dynamics : revision, fusion, abduction*. Rapport technique arXiv 1802.05142, arXiv cs.AI, 2018.

[17] Bloch, I., R. Pino-Pérez et C. Uzcategui: *A unified Treatment of Knowledge Dynamics*. Dans *International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR)*, pages 329–337. AAAI Press, 2004.

[18] Caramello, O. et L. Lafforgue: *Ontologies, knowledge representations and Grothendieck toposes*. Dans *Invited talk to Semantics Workshop, Lagrange Center, Huawei*, 2022.

[19] Cousty, J., L. Najman, F. Dias et J. Serra: *Morphological filtering on graphs*. Computer Vision and Image Understanding, 117 :370–385, 2013.

[20] Cousty, J., L. Najman et J. Serra: *Some morphological operators in graph spaces*. Dans Wilkinson, M. et J. Roerdink (rédacteurs) : *International Symposium on Mathematical Morphology (ISSM09)*, tome LNCS 5720, pages 149–160. Springer-Verlag, 2009.

[21] Dias, F., J. Cousty et L. Najman: *Some morphological operators on simplicial complex spaces*. Dans *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI11)*, tome LNCS 6607, pages 441–452. Springer-Verlag, 2011.

[22] Gorogiannis, N. et A. Hunter: *Merging First-Order Knowledge using Dilation Operators*. Dans *Fifth International Symposium on Foundations of Information and Knowledge Systems, FoIKS'08*, tome LNCS 4932, pages 132–150, 2008.

[23] Goy, A., M. Aiguier et I. Bloch: *From Structuring Elements to Structuring Neighborhood Systems*. Dans *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing - 14th International Symposium, ISMM 2019*, tome LNCS 11564, pages 16–28, 2019.

[24] Grothendieck, A.: *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tohoku Mathematical Journal, 9 :119–221, 1957.

[25] Johnstone, P.: *Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium. Vol1. and Vol.2*. Oxford University Press, 2002.

[26] Katsuno, H. et A. O. Mendelzon: *Propositional knowledge base revision and minimal change*. Artificial Intelligence, 52 :263–294, 1991.

[27] Konieczny, S. et R. Pino Pérez: *Logic based merging*. Journal of Philosophical Logic, 40(2) :239–270, 2011, ISSN 0022-3611.

[28] Lawvere, F. W.: *Introduction to Toposes, Algebraic Geometry and Logic*. Dans *Halifax Conference*, tome 274 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–12. Springer, 1972.

[29] MacLane, S.: *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 1971.

[30] Menni, M. et C. Smith: *Modes of Adjointness*. Journal of Philosophical Logic, 42(1), 2013.

[31] Meyer, F. et J. Stawiaski: *Morphology on graphs and minimum spanning trees*. Dans Wilkinson, M. et J. Roerdink (rédacteurs) : *International Symposium on Mathematical Morphology (ISSM09)*, tome LNCS 5720, pages 161–170. Springer-Verlag, 2009.

[32] Pacuit, E.: *Neighborhood semantics for modal logic*. Springer, 2017.

[33] Pino-Pérez, R. et C. Uzcátegui: *Jumping to explanation versus jumping to conclusions*. Artificial Intelligence, 111(2) :131–169, 1999.

[34] Randell, D., Z. Cui et A. Cohn: *A Spatial Logic based on Regions and Connection*. Dans Nebel, B., C. Rich et W. Swartout (rédacteurs) : *Principles of Knowledge Representation and Reasoning KR'92*, pages 165–176, San Mateo, CA, 1992. Kaufmann.

[35] Serra, J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.

[36] Serra, J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology. Part II : Theoretical Advances*. Academic Press, 1988.

[37] Vincent, L.: *Graphs and Mathematical morphology*. Signal Processing, 16(4) :365–388, 1989.

[38] Wijesekera, D.: *Constructive modal logic I*. Annals of Pure and Applied Logic, 50, 1990.