Décrire et quantifier la contradiction entre des éléments de preuve via la logique de Belnap-Dunn et la théorie de Dempster-Shafer

Marta Bílková[1] **Sabine Frittella**[2] **Daniil Kozhemiachenko**[2]
Ondrej Majer[3] **Krishna Manoorkar**[4]

[1] The Czech Academy of Sciences, Institute of Computer Science, Prague, Czech Republic
[2] INSA Centre Val de Loire, Univ. Orléans, LIFO EA 4022, France
[3] The Czech Academy of Sciences, Institute of Philosophy, Prague, Czech Republic
[4] Vrije University, Amsterdam, Netherlands

bilkova@cs.cas.cz sabine.frittella@insa-cvl.fr
daniil.kozhemiachenko@insa-cvl.fr majer@flu.cas.cz
k.b.manoorkar@vu.nl

Résumé

Les fonctions de croyance sont une généralisation des fonctions de probabilité qui permettent de coder une incertitude sur la probabilité d'un événement en fournissant des bornes inférieure et supérieure sur sa probabilité. La théorie des fonctions de croyance (aussi appelée théorie de Dempster-Shafer) permet d'encoder des éléments de preuve via des fonctions de croyance et de les combiner. La Logique de Belnap-Dunn (LBD) est une logique à quatre valeurs introduite pour modéliser le raisonnement avec des informations incomplètes ou contradictoires. Dans ce travail, nous montrons comment la théorie de Dempster-Shafer peut être utilisée avec LBD afin de formaliser un raisonnement avec des éléments de preuve incomplets et/ou contradictoires.

Abstract

Belief functions are a generalisation of probability functions that allow encoding uncertainty on the probability of an event by providing a lower and an upper bound on its probability. Belief function theory (also called Dempster-Shafer theory) proposes ways to encode pieces of evidence via belief functions and to combine them. Belnap-Dunn Logic (LBD) is a four-valued logic introduced to model reasoning with incomplete or contradictory information. In this work, we show how Dempster-Shafer theory can be used over LBD in order to formalise reasoning with incomplete and/or contradictory pieces of evidence.

Nous présentons d'abord un bref état de l'art sur la théorie de Dempster-Shafer, la logique de Belnap-Dunn et les probabilités paraconsistantes. Puis nous discutons nos axes de recherche.

Combinaison de preuves et gestion du conflit dans la théorie de Dempster-Shafer. Dans la théorie de Dempster-Shafer (DS), l'information fournie par une source est encodée via une fonction de croyance. La combinaison de l'information provenant de sources conflictuelles ou contradictoires est un sujet d'étude majeur [6, 8, 7, 3]. Pour appliquer la règle de combinaison originale de Dempster (règle DS) [6], on suppose que les sources sont complètement fiables, et donc tout conflit entre elles est considéré comme impossible. Zadeh [8] donne un exemple montrant que la règle DS peut conduire à des résultats contre-intuitifs lorsqu'elle est utilisée pour agréger des informations qui ne sont pas entièrement fiables et avec un degré important de conflit entre eux.

Plusieurs modifications de la règle DS ont été proposées et étudiées dans la littérature pour agréger des informations provenant à la fois de sources peu fiables et fortement contradictoires. [6] décrit la méthode d'*affaiblissement* pour gérer les conflits. Dans cette méthode, lorsque les sources ont un conflit entre elles, l'analyste affaiblie l'information transmise par les sources en fonction de leur fiabilité avant d'utiliser la règle DS. [7] propose une règle de combinaison similaire à la règle DS mais la masse attachée aux informations contradictoires est assignée à l'ensemble du cadre de discernement. Autrement dit, avoir des preuves contradictoires est considéré comme équivalent à ne pas avoir d'informations. [3] propose de considérer que, si deux sources attachent des masses aux ensembles A et

B, avec $A \cap B = \emptyset$, alors, lors de la combinaison, la masse $m(A) \cdot m(B)$ est attachée à l'ensemble $A \cup B$. Intuitivement, cela correspond à l'idée que si les sources sont contradictoires, alors l'analyste conclut qu'au moins l'une d'entre elles est correcte.

Dans ce travail, nous utilisons une extension de la Logique de Benlap Dunn (LBD) pour représenter et combiner des preuves contradictoires.

Logique de Belnap-Dunn. LBD a été introduit pour raisonner sur l'information disponible au sujet d'un énoncé plutôt que sur la vérité de cet énoncé [1]. En logique classique, un énoncé p est soit *vrai* soit *faux*, ce qui signifie que p est *vrai* (resp. faux) ssi l'énoncé p est vrai (resp. faux) dans le monde réel. Dans LBD, un énoncé p est soit "étayé par les informations disponibles", soit "contredit par les informations disponibles", soit "ni étayé ni contredit par les informations disponibles", soit "à la fois étayé et contredit par les informations disponibles". Ces quatre valeurs de vérité sont respectivement notées **T** (*true*), **F** (*false*), **N** (*neither*), **B** (*both*) et sont interprétées sur l'algèbre de De Morgan à **4** éléments (Figure 1).

Les quatre éléments ordonnés de bas en haut définissent le *treillis de la vérité*. En passant de **F** à **T**, on passe d'une situation où l'information disponible soutient pleinement la fausseté de l'énoncé, à une situation où l'information disponible soutient pleinement la véracité de l'énoncé. Les quatre éléments ordonnés de gauche à droite définissent le *treillis de l'information*. En passant de **N** à **B**, on passe d'une situation où il n'y a pas d'information sur l'énoncé, à une situation où l'information est contradictoire.

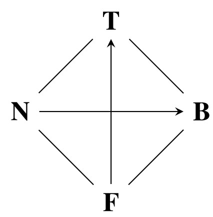

FIGURE 1 – Carré de Belnap-Dunn

Une logique où $p \vee \neg p$ (resp. $p \wedge \neg p$) n'est pas un axiome est appelée *paracomplète* (resp. *paraconsistante*). LBD est un affaiblissement de la logique classique propositionnelle qui est à la fois paracomplète et paraconsistante.

Probabilités paraconsistantes. Dans le cas classique, $\mathrm{p}(\phi)$ (resp. $\mathrm{p}(\neg\phi)$) encode la probabilité que ϕ soit vrai (resp. faux). [4] introduit des probabilités paraconsistantes qui décrivent l'information disponible sur ϕ via quatre nombres (b, d, u, c). Ils encodent le degré de croyance b, d'incrédulité d, d'incertitude u (ignorance) et de conflit c (contradiction) à propos de ϕ. [5] présente une extension probabiliste de LBD avec une axiomatisation correcte et complète.

Projet en cours. Dans [2], nous introduisons des fonctions de croyance sur des modèles de Belnap-Dunn et présentons des logiques pour raisonner à la fois avec des probabilités et des fonctions de croyance sur LBD. Ceci est un premier pas vers la compréhension des probabilités (imprécises) dans un cadre paracomplet et paraconsistant.

Dans ce travail, nous montrons comment des situations, où des informations hautement contradictoires sont disponibles, peuvent être formalisées en utilisant la théorie de Dempster-Shafer et la logique LBD. Tout d'abord, nous expliquons comment encoder des preuves via des fonctions de masse sur des modèlesde Belnap-Dunn et comment interpréter les fonctions de croyance et de plausibilité qui en résultent. Ensuite, nous discutons d'une variation de la règle DS sur les modèles de Belnap-Dunn et de son interprétation dans LBD. Enfin, nous introduisons différentes notions de support d'un énoncé qui induisent différentes fonctions de croyance sur des formules de la logique LBD, et nous montrons que certaines d'entre elles permettent de déduire des ensembles de probabilités classiques basés sur des fonctions de masse sur des modèles de Belnap-Dunn.

Références

[1] Belnap, N.D.: *How a Computer Should Think*. Dans Omori, H. et H. Wansing (rédacteurs) : *New Essays on Belnap-Dunn Logic*, tome 418 de *Synthese Library (Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science)*. Springer, Cham, 2019.

[2] Bílková, M., S. Frittella, D. Kozhemiachenko, O. Majer et S. Nazari: *Reasoning with belief functions over Belnap–Dunn logic*. `https://arxiv.org/abs/2203.01060`, 2022.

[3] Dubois, D. et H. Prade: *Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures*. Computational intelligence, 4 :244–264, 1988.

[4] Dunn, J.M.: *Contradictory information : Too much of a good thing*. Journal of Philosophical Logic, 39 :425–452, 2010.

[5] Klein, D., O. Majer et S. Rafiee Rad: *Probabilities with Gaps and Gluts*. Journal of Philosophical Logic, 50(5) :1107–1141, 2021.

[6] Shafer, G.: *A mathematical theory of evidence*. Princeton university press, 1976.

[7] Yager, R.R.: *On the Dempster-Shafer framework and new combination rules*. Information sciences, 41(2) :93–137, 1987.

[8] Zadeh, L.A.: *On the validity of Dempster's rule of combination of evidence*. Infinite Study, 1979.